

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

## **ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

Учебное пособие

Новосибирск 2014

УДК 534.01+537.86(075)

ББК 22.336

Э 456

Кафедра теоретической и прикладной физики

Составитель канд. техн. наук, доц. *В.Я. Чечуев*

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *М.П. Синюков* (НГАВТ);  
канд. физ.-мат. наук, доц. *В.И. Сигимов* (НГАВТ)

**Элементы физики колебаний и волн:** учеб. пособие / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т; сост. В.Я. Чечуев. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2014. – 120 с.

Учебное пособие содержит изучаемый в курсе общей физики материал по электростатике и электромагнетизму.

Предназначено для студентов, обучающихся по всем направлениям и формам обучения, реализуемым в НГАУ.

Утверждено и рекомендовано к изданию методическим советом Инженерного института (протокол № 18 от 28 мая 2013 г.).

## **ВВЕДЕНИЕ**

Главное отличие данного учебного пособия от существующих состоит в том, что различные по физической природе колебания и волны рассматриваются с единой точки зрения.

Материал, излагаемый в пособии, направлен на формирование компетенций в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами по направлениям подготовки, реализуемым в НГАУ.

# 1. КОЛЕБАНИЯ

## 1.1. Общие сведения о колебаниях

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприёмника и т. п.

Физическая природа колеблющейся величины может быть разной. В связи с этим различают механические, электромагнитные и другие колебания. Однако *различные по физической природе* процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность единого подхода к изучению колебаний различной физической природы. Здесь мы подробно рассмотрим механические и электромагнитные колебания.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными, или собственными, называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщён толчок либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Примером могут служить колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются

эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счёт энергии поднятой гири или закрученной пружины, причём эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

При параметрических колебаниях за счёт внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например, длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

## 1.2. Гармонические колебания

Простейшими являются гармонические колебания, т.е. такие, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по двум причинам: во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим, и во-вторых, периодические процессы иной формы могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Начнём с рассмотрения механических гармонических колебаний. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из шарика массой  $m$ , подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с  $m$  (рис. 1.1). В положении равновесия сила  $mg$  уравнивается силой  $k \cdot \Delta \ell_0$ :

$$mg = k \cdot \Delta \ell_0 \quad (1.1)$$

( $\Delta \ell_0$  – удлинение пружины).

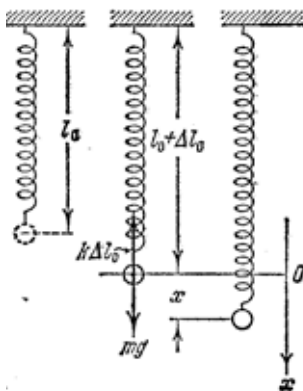


Рис. 1.1

Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой  $x$ , причём ось  $x$  направим по вертикали вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия шарика. Если сместить шарик в положение, характеризуемое координатой  $x$ , то удлинение пружины станет равным  $\Delta \ell_0 + x$  и проекция результирующей силы на ось  $x$  примет значение  $F = mg - k(\Delta \ell_0 + x)$ . Учтя (1.1), получим, что

$$F = -kx. \quad (1.2)$$

Таким образом, в рассмотренном примере результирующая силы тяжести и упругой силы имеет характер квазиупругой силы.

Сообщим шарiku смещение  $x = a$ , после чего предоставим систему самой себе. Под действием квазиупругой силы шарик будет двигаться к положению равновесия с всё возрастающей скоростью  $v = \frac{dx}{dt}$ . При этом потенциальная

энергия системы  $E_p = \frac{kx^2}{2}$ , будет убывать, но зато появится

всё возрастающая кинетическая энергия  $E = \frac{mv^2}{2}$ . При-

дя в положение равновесия, шарик продолжает двигаться по инерции. Это движение будет замедленным и прекратится тогда, когда кинетическая энергия полностью превратится в потенциальную энергию, т.е. смещение шарика станет равным  $a$ . Затем такой же процесс будет протекать при движении шарика в обратном направлении. Если трение в системе отсутствует, энергия системы должна сохраняться, и шарик будет двигаться в пределах от  $x = a$  до  $x = -a$  неограниченно долго.

Чтобы определить характер движения, запишем для шарика второй закон Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (1.3)$$

Введя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.4)$$

преобразуем уравнение (1.3) следующим образом:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.5)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = a \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.6)$$

где  $a$  и  $\alpha$  – произвольные постоянные.

Итак, смещение  $x$  изменяется со временем по закону косинуса. Следовательно, движение системы, находящейся под действием силы вида  $F = -kx$ , представляет собой гармоническое колебание.

График гармонического колебания, т.е. график функции (1.6), показан на рис. 1.2.

По горизонтальной оси отложено время  $t$ , по вертикальной оси – смещение  $x$ . Поскольку косинус изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$ , значения  $x$  лежат в пределах от  $-a$  до  $+a$ .

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется амплитудой колебания. Амплитуда  $a$  – постоянная положительная ве-

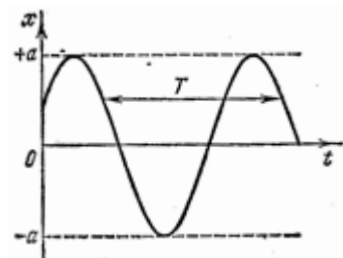


Рис. 1.2

личина. Её значение определяется величиной первоначального отклонения.

Величина  $(\omega_0 t + \alpha)$ , стоящая под знаком косинуса, называется фазой колебания. Постоянная  $\alpha$  представляет собой значение фазы в момент времени  $t = 0$  и называется *начальной фазой* колебания. С изменением начала отсчёта времени изменяется и  $\alpha$ . Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчёта времени. Так как значение  $x$  не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа, всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше  $\pi$ . Поэтому обычно рассматриваются только значения  $\alpha$ , лежащие в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

Поскольку косинус – периодическая функция с периодом  $2\pi$ , различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени  $T$ , за который фаза колебания получает приращение, равное  $2\pi$  (см. рис. 1.2). Этот промежуток времени  $T$  называется *периодом* колебания. Он может быть определён из следующего условия:

$$\begin{aligned} [\omega_0(t + T) + \alpha] &= (\omega_0 t + \alpha) + 2\pi, \text{ откуда} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебания  $\nu$ . Очевидно, что частота связана с периодом соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.8)$$

За единицу частоты принята частота такого колебания, период которого равен 1с. Эту единицу называют герцем (Гц). Частота в  $10^3$  Гц называется килогерцем (кГц), в  $10^6$  Гц – мегагерцем (МГц) и т.д.



Из (1.7) следует, что

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.9)$$

Таким образом,  $\omega_0$  определяет число колебаний за  $2\pi$  секунд. Величину  $\omega_0$  называют круговой, или циклической, частотой. Она связана с обычной частотой  $\nu$  соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Найдём скорость и ускорение шарика.

Продифференцировав (1.6) по времени, получим выражение для скорости:

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.10)$$

Как видно из (1.10), скорость также изменяется по гармоническому закону, причём амплитуда скорости равна  $a\omega_0$ . Из сравнения (1.6) и (1.10) следует, что скорость опережает смещение по фазе на  $\pi/2$ . Продифференцировав ещё раз по времени, найдём выражение для ускорения  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \frac{dv}{dt} = -a\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) \quad (1.11)$$

Как следует из (1.11), ускорение и смещение находятся в противофазе. На рис. 1.3 сопоставлены графики для смещения, скорости и ускорения.

Каждое конкретное колебание характеризуется определёнными значениями амплитуды  $a$  и начальной фазы  $\alpha$ . Значения этих величин для данного колебания могут быть определены из так называемых начальных условий, т.е. по значениям отклонения  $x_0$  и  $v_0$  в начальный момент времени. Действительно, положив в (1.6) и (1.10)  $t = 0$ , получим два уравнения:

$$x_0 = a \cdot \cos\alpha, \quad v_0 = -a\omega_0 \cdot \sin\alpha,$$

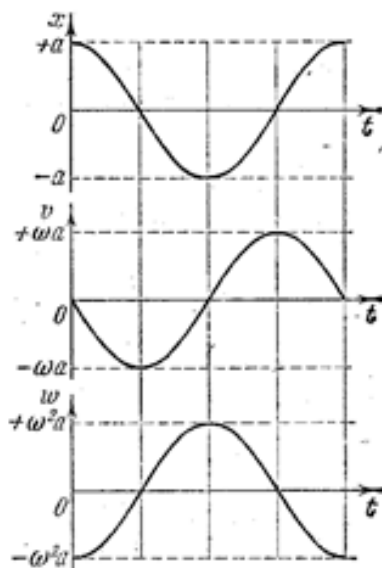


Рис. 1.3

из которых следует, что

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\right)}, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) удовлетворяется двумя значениями  $\alpha$ , лежащими в интервале от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Из этих значений нужно взять то, при котором получаются правильные знаки у косинуса и синуса.

Квазиупругая сила является консервативной. Поэтому полная энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной. В процессе колебаний, как уже отмечено, происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причём в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия  $E$  со-

стоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения  $E_{\text{pmax}}$  :

$$E = E_{\text{pmax}} = \frac{ka^2}{2} ; \quad (1.14)$$

при прохождении же системы через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения  $E_{\text{kmax}}$  :

$$E = E_{\text{kmax}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} . \quad (1.15)$$

Выражения (1.14) и (1.15) равны друг другу, так как, согласно (1.4),  $m\omega_0^2 = k$  . Выясним, как меняется со временем кинетическая и потенциальная энергия гармонического колебания. Кинетическая энергия равна

$$E_{\text{k}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha) . \quad (1.16)$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$E_{\text{p}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha) . \quad (1.17)$$

Сложив (1.16) с (1.17) и приняв во внимание, что  $m\omega_0^2 = k$ , получим формулу для полной энергии:

$$E = E_{\text{k}} + E_{\text{p}} = \frac{ka^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} . \quad (1.18)$$

Таким образом, полная энергия гармонического колебания действительно оказывается постоянной.

Выражениям для  $E_{\text{k}}$  и  $E_{\text{p}}$ , используя формулы тригонометрии, можно придать следующий вид:

$$E_{\text{k}} = E \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right] ; \quad (1.19)$$

$$E_p = E \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (1.20)$$

где  $E$  — полная энергия системы.

Из этих формул видно, что  $E_k$  и  $E_p$  изменяются с частотой  $2\omega_0$ , т.е. с частотой, в 2 раза превышающей частоту гармонического колебания. На рис. 1.4 сопоставлены графики для  $x$ ,  $E_k$  и  $E_p$ .

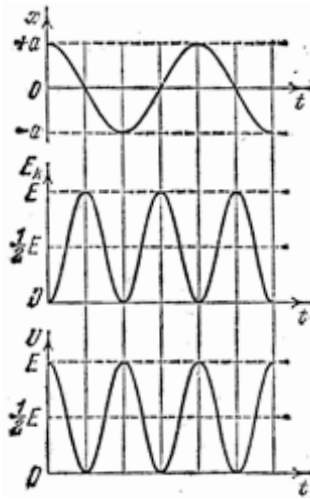


Рис. 1.4

Среднее значение квадрата синуса и квадрата косинуса равно  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, среднее значение  $E_k$  совпадает со средним значением  $E_p$  и равно  $\frac{E}{2}$ .

### 1.3. Гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0, \quad (1.21)$$

где  $S$  – изменяющаяся величина. Колебания гармонического осциллятора служат точкой или приближённой моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются рассмотренный нами пружинный маятник, колебательный контур.

**Математический маятник.** Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжёлый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\varphi$ , образованным нитью с вертикалью (рис. 1.5). При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент  $\vec{M}$ , равный по величине  $mg\ell \cdot \sin\varphi$  ( $m$  – масса шарика;  $\ell$  – длина нити). Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и аналогичен в этом отношении квазиупругой силе. Поэтому так же, как смещению и квазиупругой силе, моменту  $\vec{M}$  и угловому смещению  $\vec{\varphi}$  нужно приписывать противоположные знаки. С учётом этого выражение для вращательного момента имеет вид:



Рис. 1.5

$$N = -mg\ell \cdot \sin\varphi . \quad (1.22)$$

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения. Обозначив угловое ускорение через  $\ddot{\varphi}$  и, учитывая, что момент инерции маятника равен, получим:

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} = -mg\ell \cdot \sin\varphi$$

Преобразовав это уравнение, будем иметь:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \cdot \sin \varphi = 0. \quad (1.23)$$

Введём обозначение

$$\frac{g}{\ell} = \omega_0^2 \quad (1.24)$$

и ограничимся рассмотрением малых колебаний, когда можно положить  $\sin \varphi \approx 0$ , тогда придём к уравнению

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 = 0, \quad (1.25)$$

которое идентично с уравнением (1.5). Его решение имеет вид

$$\varphi = a \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.26)$$

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется по гармоническому закону.

Как следует из (1.24), частота колебаний математического маятника не зависит от массы маятника.

По формуле (1.7) с учётом (1.24) получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (1.27)$$

Если условие  $\sin \varphi \approx 0$  не выполняется, то, решив уравнение (1.23), можно найти для периода колебаний следующую формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 \frac{a}{2} + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \cdot \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right\},$$

где  $a$  – амплитуда колебаний, т.е. наибольший угол, на который отклоняется маятник из положения равновесия.

**Физический маятник.** Если колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку, маятник называется *физическим*. При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен

$$N = -mg\ell \cdot \sin\varphi, \quad (1.28)$$

где  $m$  — масса маятника, а  $\ell$  — расстояние между точкой подвеса  $O$  и центром масс  $C$  маятника (рис. 1.6). Знак минус имеет то же значение, что и в случае формулы (1.22).

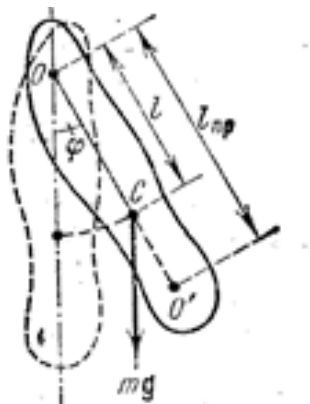


Рис. 1.6

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой  $J$ , можно написать:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -mg \cdot \sin\varphi. \quad (1.29)$$

В случае малых колебаний (1.29) переходит в уже известное нам уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (1.30)$$

Через  $\omega_0^2$  в данном случае обозначена величина

$$\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{J}. \quad (1.31)$$

Из уравнений (1.30) и (1.31) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром масс маятника. В соответствии с (1.31)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell}}. \quad (1.32)$$

Из сопоставления (1.26) и (1.31) получается, что математический маятник с длиной

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{J}{m\ell} \quad (1.33)$$

будет иметь такой период колебаний, как и данный физический маятник. Величину (1.33) называют приведённой длиной физического маятника. Таким образом, приведённая длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведённой длины от оси вращения, называется центром качания физического маятника (точка  $O'$  на рис. 1.6).

Центр качания и точка подвеса обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания период маятника остаётся тем же.

На этом свойстве основано определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника. Обратным маятником называется такой маятник, у кото-



рого имеются две параллельные друг другу, закреплённые вблизи его концов опорные призмы, за которые он поочерёдно подвешивается. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нём тяжёлые грузы. Перемещением грузов добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными рёбрами призм будет равно  $\ell_{\text{пр}}$ . Измерив период колебаний маятника и зная  $\ell_{\text{пр}}$ , можно по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{\text{пр}}}{g}}$$

найти ускорение свободного падения  $g$ .

**Колебательный контур.** В цепи, содержащей индуктивность и ёмкость, могут возникать электрические колебания. Поэтому такая цепь называется *колебательным контуром*. Колебания в контуре можно вызвать либо сообщив обкладкам конденсатора некоторый начальный заряд, либо возбудив в индуктивности ток. Воспользуемся первым способом. Последовательность стадий колебательного процесса в этом случае показана на рис. 1.7. Присоединим отключенный от индуктивности конденсатор к источнику напряжения. Это приведёт к возникновению на обкладках зарядов  $+q$  и  $-q$ . Между обкладками возникнет электрическое поле с энергией  $\frac{q^2}{2C}$  (стадия 1). Если затем отключить источник напряжения и замкнуть конденсатор на индуктивность, ёмкость начнёт разряжаться и в контуре потечёт ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но зато возникнет всё возрастающая энергия магнитного поля, обусловленного током  $I$ , текущим через индуктивность. Эта энергия равна  $\frac{LI^2}{2}$ .

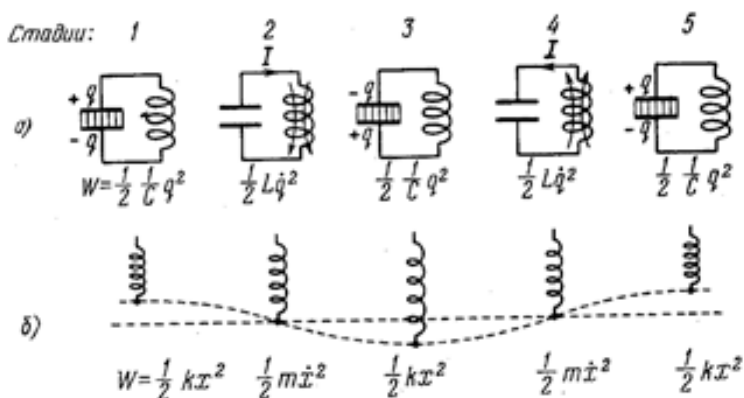


Рис. 1.7

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия, состоящая из энергий электрического и магнитного полей, не расходуется на нагревание проводов и будет оставаться постоянной. Поэтому в момент, когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и энергия электрического поля обращается в нуль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают максимального значения (стадия 2; начиная с этого момента ток течёт за счёт э.д.с. самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается, и когда заряды на обкладках достигнут первоначального значения  $q$ , сила тока станет равной нулю (стадия 3). Затем те же процессы протекают в обратном направлении (стадии 4 и 5), после чего система приходит в исходное состояние (стадия 5) и весь цикл повторяется снова и снова. В ходе процесса периодически изменяются (т.е. колеблются) заряды на обкладках, напряжение на конденсаторе и сила тока, текущего через индуктивность. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

На рис. 1.7, б колебаниям в контуре сопоставлены колебания пружинного маятника. Сообщению зарядов обкладкам

конденсатора соответствует выведение маятника внешней силой из положения равновесия и сообщение ему первоначального отклонения  $x$ . При этом возникает потенциальная энергия упругой деформации пружины, равная  $\frac{kx^2}{2}$ . Стадии 2 соответствует прохождение маятника через положение равновесия. В этот момент квазиупругая сила равна нулю и маятник продолжает двигаться по инерции. К этому времени энергия маятника полностью переходит в кинетическую энергию и определяется выражением  $\frac{mv^2}{2}$  и т.д.

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что энергия электрического поля  $\frac{q^2}{2C}$  аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля  $\frac{LI^2}{2}$  аналогична кинетической энергии. Индуктивность  $L$  играет роль массы  $m$ , величина, обратная ёмкости – роль жёсткости  $K$ . Наконец, заряду соответствует смещение маятника из положения равновесия  $x$ , а силе тока  $I$  – скорость  $v$ . Далее мы увидим, что аналогия между электрическими и механическими колебаниями распространяется и на описывающие их математические уравнения.

Найдём уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления. Условимся считать положительным ток, заряжающий конденсатор (рис. 1.8). Тогда

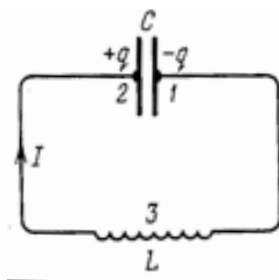


Рис. 1.8

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (1.34)$$

Напишем для цепи 1–3–2 закон Ома:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (1.35)$$

В нашем случае  $R = 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$ ,  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$ .

Подстановка этих значений в (1.35) даёт:

$$0 = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}. \quad (1.36)$$

Наконец, заменив  $\frac{dI}{dt}$  на  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , получим уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (1.37)$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (1.38)$$

уравнение (1.37) принимает вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.39)$$

хорошо знакомый нам из учения о механических колебаниях (см. формулу (1.5)). Решением этого уравнения является функция

$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.40)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой, определяемой выражением (1.38). Эта частота называется *собственной частотой контура*. Для периода колебаний получается *формула Томсона*:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (1.41)$$

Напряжение на конденсаторе  $U$  отличается от заряда множителем  $\frac{1}{C}$  :

$$U = \frac{q_m}{C} \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.42)$$

Продифференцировав функцию (1.40) по времени, получим выражение для силы тока:

$$I = -\omega_0 q_m \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cdot \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.43)$$

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ . Из формулы (1.42) и (1.43) следует, что

$$U_m = \frac{q_m}{C}, \quad I_m = \omega_0 q_m.$$

Взяв отношение этих амплитуд и, заменив  $\omega_0$  по формуле (1.38), получим:

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m. \quad (1.44)$$

#### **1.4. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот**

Сложение нескольких колебаний одинакового направления значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким способом схема называется векторной диаграммой.

Возьмём ось, которую обозначим буквой  $x$  (рис. 1.9). Из точки  $O$ , взятой на оси, отложим вектор длины  $a$ , образующий с осью угол  $\alpha$ . Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$ , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $x$  в пределах от  $-a$  до  $+a$ , при-

чём координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

$$x = a \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора, круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени.

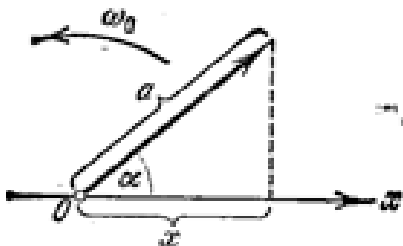


Рис. 1.9

Из сказанного следует, что гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью  $x$  угол, равный начальной фазе колебания.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение  $x$  колеблющегося тела будет суммой смещений  $x_1$  и  $x_2$ , которые запишутся следующим образом:

$$x_1 = a_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \quad (1.45)$$

Представим оба колебания с помощью векторов  $a_1$  и  $a_2$  (рис. 1.10). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор  $A$ . Легко видеть, что проекция этого вектора на ось  $x$  равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

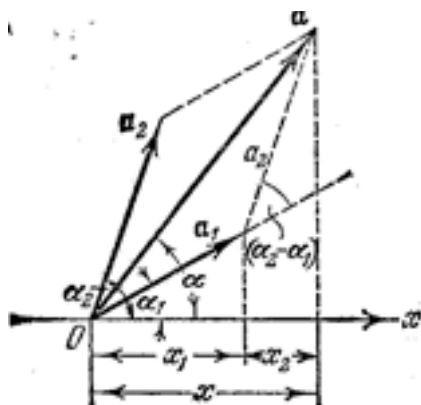


Рис. 1.10

Следовательно, вектор  $a$  представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью  $\omega_0$ , как и векторы  $a_1$  и  $a_2$ , так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $a$  и начальной фазой  $\alpha$ . Из построения видно, что

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cdot \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot a_2 \times \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (1.46)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \cdot \sin \alpha_1 + a_2 \cdot \sin \alpha_2}{a_1 \cdot \cos \alpha_1 + a_2 \cdot \cos \alpha_2}. \quad (1.47)$$

Итак, представление гармонических колебаний посредством векторов даёт возможность свести сложение нескольких колебаний к операции сложения векторов. Этот приём бывает особенно полезен, например, в оптике или электротехнике.

Проанализируем выражение (1.46) для амплитуды. Если разность фаз обоих колебаний  $\alpha_2 - \alpha_1$  равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна  $a = a_1 + a_2$ . Если разность фаз  $\alpha_2 - \alpha_1$  равна  $+\pi$  или  $-\pi$ , т.е. оба колебания нахо-

дятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна  $|a_1 - a_2|$ .

Если частоты колебаний  $x_1$  и  $x_2$  неодинаковы, векторы  $a_1$  и  $a_2$  будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор  $a$  пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. Следовательно, результирующим движением будет в этом случае не гармоническое колебание, а некоторый сложный колебательный процесс.

### 1.5. Биения

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Результирующее движение в этом случае можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется *биениями*.

Обозначим частоту одного из колебаний  $\omega$ , частоту второго колебания через  $\omega + \Delta\omega$ . По условию  $\Delta\omega \ll \omega$ . Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными  $a$ . Допустим, что начальные фазы колебаний равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = a \cdot \cos t, \quad x_2 = a \cdot \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Складывая эти выражения, получим:

$$x = x_1 + x_2 = \left( 2a \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cdot \cos \omega t \quad (1.48)$$

(во втором множителе пренебрегаем членом  $\frac{\Delta\omega}{2}$  по сравнению с  $\omega$ ). График функции (1.48) изображён на рис. 1.11, а. График построен для  $\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$ .



Заключённый в скобки множитель в (1.48) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Это даёт нам основание рассматривать колебание (1.48) как гармоническое колебание частоты  $\omega$ , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в скобках, так как он изменяется в пределах от  $-2a$  до  $+2a$ , в то время как амплитуда по определению – положительная величина. График амплитуды показан на рис. 1.11, б. Аналитическое выражение амплитуды имеет вид:

$$\text{амплитуда} = \left| 2a \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t \right|. \quad (1.49)$$

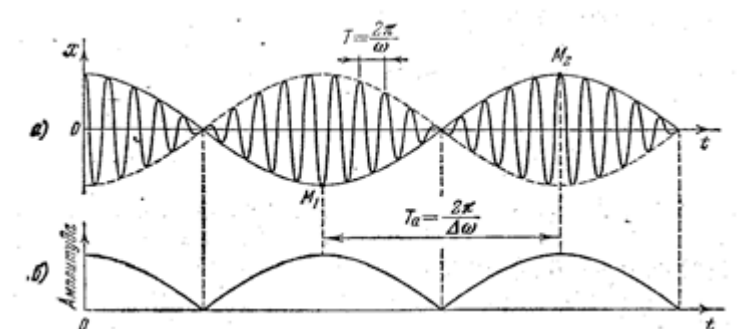


Рис. 1.11

Функция (1.49) – периодическая функция с частотой, вдвое превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля. Таким образом, частота пульсаций амплитуды – её называют частотой биений – равна разности частот складываемых колебаний.

Множитель  $2a \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t$  не только определяет амплитуду, но и влияет на фазу колебания. Это проявляется, например, в том, что отклонения, соответствующие соседним максимумам амплитуды, имеют противоположные знаки (точки  $M_1$  и  $M_2$  на рис. 1.11, а).

## 1.6. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний

Допустим, что материальная точка может совершать колебания как вдоль оси  $x$ , так и вдоль перпендикулярной к ней оси  $y$ . Если возбудить оба колебания, материальная точка будет двигаться по некоторой криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчёта времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = a \cdot \cos \omega t, \quad y = b \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.50)$$

где  $\alpha$  – разность фаз обоих колебаний.

Выражения (1.50) представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычной форме, надо исключить из уравнений (1.50) параметр  $t$ . Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (1.51)$$

Следовательно,

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (1.52)$$

Теперь развёрнём косинус во втором из уравнений (1.50) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  их значения (1.51) и (1.52). В результате получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cdot \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (1.53)$$

Уравнение (1.53) после преобразований можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (1.54)$$

Последнее уравнение – уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей  $x$  и  $y$ . Ориентация эллипса и величина его полуосей довольно сложным образом зависят от амплитуд  $a$  и  $b$  и разности фаз  $\alpha$ .

Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

Разность фаз  $\alpha$  равна нулю. В этом случае уравнение (1.54) принимает вид

$$\left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (1.55)$$

Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой  $\omega$  и амплитудой, равной  $\sqrt{a^2 + b^2}$  (рис. 1.12).

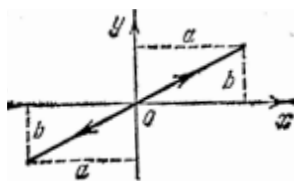


Рис. 1.12

Разность фаз  $\alpha = \pm \pi$ . Уравнение (1.54) имеет вид:

$$\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0,$$

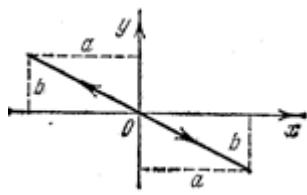


Рис. 1.13

откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 1.13):

$$y = -\frac{b}{a} x. \quad (1.56)$$

При  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  уравнение (1.54) переходит в

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.57)$$

т. е. в уравнение эллипса, приведённого к координатным осям, причём полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний (рис. 1.14).

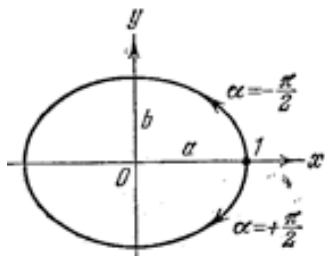


Рис. 1.14

При равенстве амплитуд  $a$  и  $b$  эллипс вырождается в окружность.

Случаи  $\alpha = +\frac{\pi}{2}$  и  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если  $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ , уравнения (1.50) можно

записать следующим образом:

$$x = a \cdot \cos \omega t, \quad y = -b \cdot \sin \omega t. \quad (1.58)$$

В момент  $t = 0$  тело находится в точке 1 (рис. 1.14). В последующие моменты времени координата  $x$  уменьшается, а координата  $y$  становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке.

При  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  уравнения колебаний имеют вид:

$$x = a \cdot \cos \omega t, \quad y = b \cdot \sin \omega t. \quad (1.59)$$

Отсюда можно заключить, что движение происходит против часовой стрелки.

Если частоты взаимно-перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. На рис. 1.15 для примера показана кривая

для отношения частот 3:4 и разности фаз  $\pi/2$ . Существует атлас фигур Лиссажу.

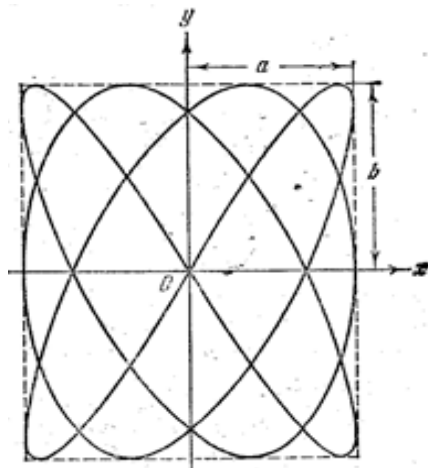


Рис. 1.15

## 1.7. Затухающие колебания

Начнём с механических. Опустим шарик пружинного маятника (см. рис. 1.1) в сосуд, например, с глицерином. В этом случае в процессе колебаний на шарик будет действовать не только квазиупругая сила, но и сила сопротивления  $F_r$  со стороны жидкости. При малых колебаниях силу сопротивления можно считать пропорциональной величине скорости шарика:

$$F_r = -r \frac{dx}{dt}. \quad (1.60)$$

Здесь  $r$  — постоянная, называемая коэффициентом сопротивления. Знак минус обусловлен тем, что сила  $\vec{F}_r$  и скорость  $\vec{v}$  имеют противоположные направления, следовательно, их проекции на ось  $x$  имеют разные знаки.

Чтобы определить характер движения шарика в этом случае, запишем второй закон Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (1.61)$$

Преобразуем уравнение (1.61), введя обозначения:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.62)$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания, а  $\omega_0$  – частота, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды (при  $r = 0$ ). С учётом (1.62) получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = 0. \quad (1.63)$$

Это дифференциальное уравнение описывает затухающие колебания пружинного маятника. Оно же, как будет показано ниже, описывает затухающие колебания любой другой системы независимо от природы колеблющейся величины.

При не слишком сильном затухании решение уравнения (1.63) имеет вид:

$$x = a_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha). \quad (1.64)$$

Здесь  $a_0$  и  $\alpha$  – произвольные постоянные;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний. На рис. 1.16 представлен график функции (1.64). Пунктирными линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки  $x$ .

В соответствии с видом функции (1.64) движение шарика можно рассматривать как колебание частоты  $\omega$  с амплитудой, изменяющейся по закону  $a(t) = a_0 \cdot e^{-\beta t}$ .

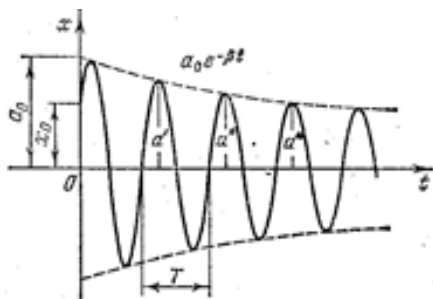


Рис. 1.16

Верхняя из пунктирных кривых на рис. 1.16 даёт график функции  $a(t)$ , причём величина  $a_0$  представляет собой амплитуду в начальный момент времени. Начальное смещение  $x_0$  зависит, кроме  $a_0$ , также от начальной фазы  $\alpha$ :  $x_0 = a_0 \cdot \cos \alpha$ .

Скорость затухания колебаний определяется коэффициентами затухания  $\beta = \frac{r}{2m}$ . Найдём время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз. По определению,  $e^{-\beta \tau} = e^{-1}$ , откуда  $\beta \tau = 1$ . Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.66)$$

При незначительном сопротивлении среды ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) период колебаний практически равен  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}. \quad (1.67)$$

Это отношение называют декрементом затухания, а его логарифм – логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \quad (1.68)$$

Для характеристики колебательной системы обычно используется логарифмический декремент затухания  $\lambda$ . Выразив в соответствии с (1.68)  $\beta$  через  $\lambda$  и  $T$ , можно закон убывания амплитуды со временем записать в виде

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}.$$

За время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз, система успевает совершить  $N_e = \frac{\tau}{T}$  колебаний. Из условия  $e^{-\frac{\lambda}{T}\tau} = e^{-1}$  получается, что  $\lambda N_e = 1$ . Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина

$$Q = \frac{\mu}{\lambda} = \pi N_e, \quad (1.69)$$

называемая *добротностью* колебательной системы. Как видно из её определения, добротность пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за то время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Из (1.14) следует, что полная энергия колеблющейся системы пропорциональна квадрату амплитуды. В соответствии с этим энергия системы при затухающих колебаниях убывает со временем по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta t} \quad (1.70)$$



( $E_0$  — значение энергии при  $t = 0$ ). Продифференцировав это выражение по  $t$ , получим скорость возрастания энергии системы:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E.$$

Изменив знак на обратный, найдём скорость убывания энергии:

$$-\frac{dE}{dt} = 2\beta E. \quad (1.71)$$

Если энергия мало изменяется за время, равное периоду колебаний, убыль энергии за период можно найти, умножив (1.71) на  $T$ :

$$-\Delta E = 2\beta TE.$$

Наконец, приняв во внимание формулы (1.68) и (1.69), получим:

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{Q}{2\pi}, \quad (1.72)$$

из которого следует, что при слабом затухании колебаний добротность с точностью до множителя  $2\pi$  равна отношению энергии, запасённой в системе в данный момент к убыли этой энергии за один период колебаний.

Из формулы (1.66) следует, что с ростом коэффициента затухания период увеличивается. При  $\beta = \omega_0$  период колебаний обращается в бесконечность, т.е. движение перестаёт быть периодическим.

Теперь рассмотрим электрические затухающие колебания в колебательном контуре. Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением  $R$ . Энергия, запасённая в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают.

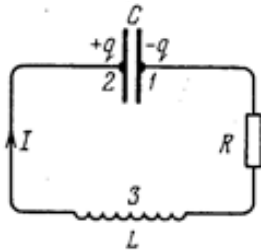


Рис. 1.17

Запишем закон Ома для цепи 1–3–2, изображённой на рис. 1.17:

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}. \quad (1.73)$$

Разделив это уравнение на  $L$  и заменив  $I$  на  $\frac{dq}{dt}$ , а  $\frac{dI}{dt}$  на  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0. \quad (1.74)$$

Приняв во внимание, что величина, обратная  $LC$ , равна квадрату собственной частоты контура  $\omega_0$  и введя обозначение

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (1.75)$$

( $\beta$  – коэффициент затухания), уравнению (1.74) можно придать вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 = 0. \quad (1.76)$$

Последнее уравнение *совпадает* с дифференциальным уравнением (1.63) затухающих механических колебаний.

При условии, что  $\beta^2 < \omega_0^2$ , решение уравнения (1.76) имеет вид:

$$q = q_m \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.77)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Подставив значение (1.38) для  $\omega_0^2$  и (1.75) для  $\beta$ , найдём, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (1.78)$$

Таким образом, частота затухающих колебаний  $\omega$  меньше собственной частоты  $\omega_0$ .

Разделив (1.77) на ёмкость  $C$ , получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{qm_0}{C} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) = U_{m_0} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha). \quad (1.79)$$

Чтобы найти силу тока, надо продифференцировать (1.77) по времени. График функции (1.77) изображён на рис. 1.18. Графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид.

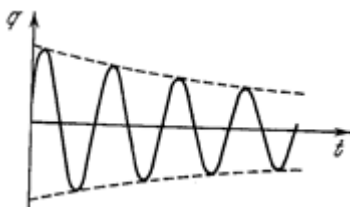


Рис. 1.18

Затухания электромагнитных колебаний, как и механических, характеризуются логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \beta T. \quad (1.80)$$

Подставив в (1.80) (1.75) и заменив на  $\frac{2\pi}{\omega}$ , получим:

$$\lambda = \frac{\pi R}{\omega L}. \quad (1.81)$$

Если затухание невелико ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ), то можно положить в (1.81)  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Тогда

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (1.82)$$

Часто колебательный контур характеризуют его добротностью

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (1.83)$$

Подставив в (1.83) (1.82), получим, что в случае слабого затухания добротность определяется соотношением

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.84)$$

В заключение отметим, что при  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ , т.е. при  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление, при котором колебательный процесс переходит апериодический, называется критическим. Значение критического сопротивления  $R_k$  определяется условием  $\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ , откуда

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.85)$$

## 1.8. Вынужденные колебания

Начнём с механических колебаний и рассмотрим их на примере пружинного маятника. Допустим, что на шарик массой  $m$ , опущенный в сосуд с глицерином, действует внешняя сила, изменяющаяся по закону  $F_0 \cdot \cos \omega t$ , где  $\omega$  — частота силы.

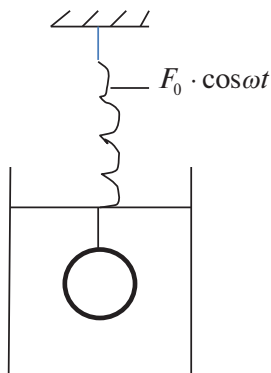


Рис. 1.19

Для установления характера движения шарика запишем второй закон Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cdot \cos \omega t. \quad (1.86)$$

Разделим уравнение (1.86) на  $m$  и введём обозначения  $2\beta = \frac{r}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Тогда получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos \omega t. \quad (1.87)$$

Здесь  $\beta$  — коэффициент затухания;  $\omega_0$  — собственная частота системы;  $F_0$  — амплитуда вынуждающей силы.

Уравнение (1.87) является неоднородным. Общее решение такого уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения мы уже знаем (см. затухающие колебания). Оно имеет вид:

$$x = a_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega' t + \alpha), \quad (1.88)$$

где  $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ , а  $a_0$  и  $L$  — произвольные постоянные.

Остаётся найти частное. Получим его с помощью векторной диаграммы. Предположим, что частное решение уравнения (1.87) имеет вид:

$$x = a \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.89)$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} = -\omega a \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \omega a \cdot \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.90)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 a \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cdot \cos(\omega t - \varphi + \pi). \quad (1.91)$$

Подстановка выражений (1.89) – (1.91) в уравнение (1.87) приводит к соотношению

$$\omega^2 a \cdot \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta\omega a \cdot \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 a \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos \omega t. \quad (1.92)$$

Из (1.92) следует, что постоянные  $a$  и  $\varphi$  должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция  $\frac{F_0}{m} \cdot \cos \omega t$  была равна сумме трёх гармонических функций, стоящих в левой части уравнения. Если изобразить функцию  $\omega_0^2 a \cdot \cos(\omega t - \varphi)$  вектором длины  $\omega_0^2 a$ , направленным вправо, то функция  $2\beta a \cdot \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$  будет выражена вектором длины  $2\beta\omega a$  (рис. 1.20), повернутым относительно  $\omega^2 a$  против часовой стрелки на угол  $\pi/2$ , а функция  $\omega^2 a \cdot \cos(\omega t - \varphi + \pi)$  – вектором длины  $\omega^2 a$ , повернутым относительно вектора  $\omega^2 a$  против часовой стрелки на угол  $\pi$ . Чтобы уравнение (1.92) было удовлетворено, сумма трёх перечисленных векторов должна совпадать с вектором, изображающим функцию  $\frac{F_0}{m} \cdot \cos \omega t$ .

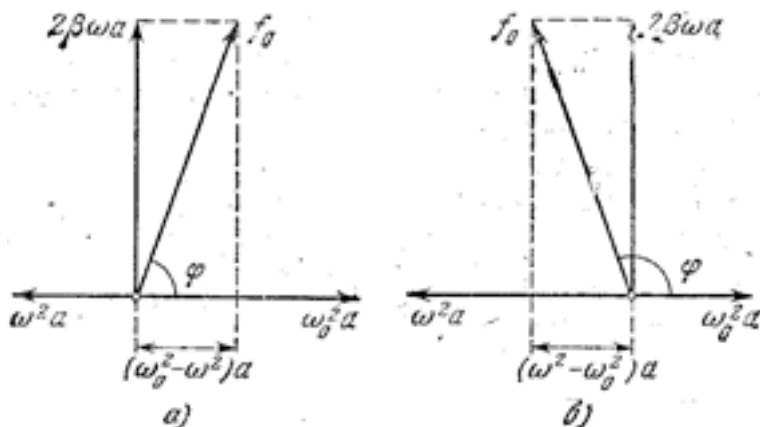


Рис. 1.20

Из рис. 1.20, а видно, что такое совпадение возможно лишь при значении амплитуды  $a$ , которое определяется условием:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a^2 + 4\beta^2\omega^2a^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2,$$

откуда

$$a = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (1.93)$$

Рис. 1.20, а отвечает случаю  $\omega < \omega_0$ . Из рис. 1.20, б, отвечающего случаю  $\omega > \omega_0$ , получается такое же значение  $a$ .

Рис. 1.20 позволяет получить также и значение  $\varphi$ , которое представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания (1.89) от обусловившей его вынужденной силы. Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.94)$$

Подставив в (1.89) значения  $a$  и  $\varphi$ , определяемые формулами (1.93) и (1.94), получим:

$$x = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (1.95)$$

Функция (1.95) в сумме с (1.88) даёт общее решение уравнения (1.87), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях. Слагаемое (1.87) играет заметную роль только в начальной стадии процесса при установлении колебаний.

С течением времени из-за экспоненциального множителя  $e^{-\beta t}$  роль слагаемого (1.88) всё больше уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя в решении лишь слагаемое (1.95).

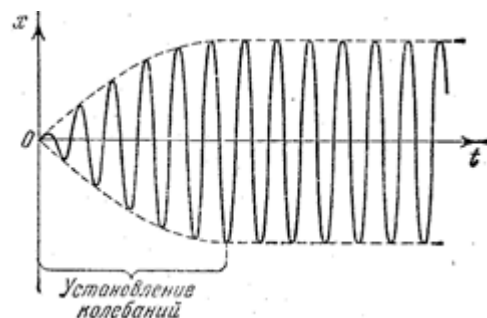


Рис. 1.21

Таким образом, функция (1.95) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда (1.93) вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Для данной колебательной системы (определённых  $\omega_0$  и  $\beta$ ) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причём величина отставания  $\varphi$  также зависит от частоты вынуждающей силы (1.94).

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определённой для данной системы частоте амплитуда достигает максимального значения. Это явление называется *резонансом*, а соответствующая частота – *резонансной частотой*.

Чтобы определить резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$ , нужно найти максимум функции (1.93) или, что то же самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по  $\omega$  и приравняв к нулю, мы получим условие, определяющее  $\omega_{\text{рез}}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (1.96)$$



Уравнение (1.96) имеет три решения:  $\omega = 0$  и  $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено как не имеющее физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1.97)$$

Подставив это значение частоты в (1.93), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$a_{\text{рез}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.98)$$

Из (1.98) следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Согласно (1.97), резонансная частота при тех же условиях ( $\beta = 0$ ) совпадает с собственной частотой колебаний системы  $\omega_0$ .

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты показана на рис. 1.22. Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям параметра  $\beta$ . Чем меньше  $\beta$ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании ( $2\beta^2 > \omega_0^2$ ) выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается. Изображённая на рис. 1.22 совокупность графиков называется *резонансными кривыми*.

По поводу резонансных кривых можно сделать ещё следующие замечания. При стремлении  $\omega$  к нулю все кривые приходят к одному и тому же значению, равному  $\frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ .

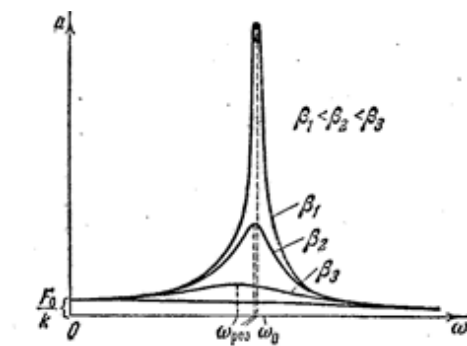


Рис. 1.22

Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины  $F_0$ . При стремлении  $\omega$  к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет своё направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия. Наконец, отметим, что чем меньше  $\beta$ , тем сильнее изменяется с частотой амплитуда вблизи резонанса, тем «острее» получается максимум.

Из формулы (1.98) вытекает, что при малом затухании (т.е. при  $\beta \ll \omega_0$ ) амплитуда при резонансе приближённо равна

$$a_{\text{рез}} \approx \frac{\frac{F_0}{k}}{2\beta\omega_0}.$$

Разделим это выражение на смещение  $x_0$  от положения равновесия под действием постоянной силы  $F_0$ , равное  $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ . В результате получим:

$$\frac{a_{\text{рез}}}{x} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q. \quad (1.99)$$

Таким образом, добротность  $Q$  показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение

системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы (это справедливо лишь при малом затухании).

Из рис. 1.20 видно, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причём величина отставания  $\varphi$  лежит в пределах от 0 до  $\pi$ . Зависимость  $\varphi$  от  $\omega$  при разных значениях  $\beta$  показана на рис. 1.23. Частоте  $\omega_0$  соответствует  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

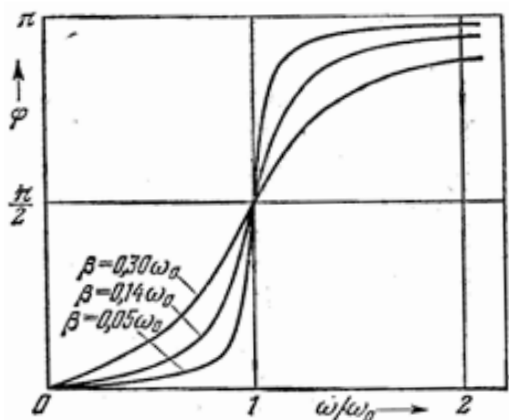


Рис. 1.23

С явлением резонанса приходится считаться. Так, например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолёта должна сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут быть возбуждены вращением гребного винта или пропеллера.

Вместе с тем явление резонанса оказывается полезным, особенно в радиотехнике, акустике и т. д.

## 1.9. Вынужденные электрические колебания

Вынужденные электрические колебания в последовательном колебательном контуре можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура перемен-

ную э.д.с. или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение

$$U = U_m \cdot \cos \omega t . \quad (1.100)$$

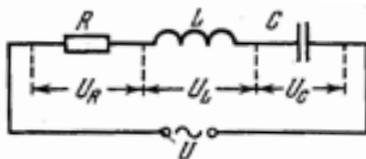


Рис. 1.24

Запишем закон Ома для цепи, изображённой на рис. 1.24:

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} + U_m \cdot \cos \omega t . \quad (1.101)$$

Разделив это уравнение на  $L$  и заменив  $I$  на  $\frac{dq}{dt}$ , а  $\frac{dI}{dt}$  на  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = U_m \cdot \cos \omega t . \quad (1.102)$$

Принимая во внимание, что  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и  $\beta = \frac{R}{2L}$ , будем иметь:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cdot \cos \omega t . \quad (1.103)$$

Уравнение (1.103) совпадает с дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний (1.87). Частное решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_m \cdot \cos(\omega t - \psi) , \quad (1.104)$$

где

$$q_m = \frac{\frac{U_m}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} ; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Подстановка в эти формулы значений  $\omega_0^2$  и  $\beta$  даёт:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}; \quad (1.105)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C - \omega L}}. \quad (1.106)$$

Общее решение получится, если к частному решению (1.104) прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения. Это решение получено при рассмотрении затухающих колебаний (1.77); оно содержит экспоненциальный множитель  $e^{-\beta t}$ , поэтому по прошествии достаточного времени им можно пренебречь. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются функцией (1.104).

Продифференцировав выражение (1.104) по  $t$ , найдём силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t - \psi) = I_m \cdot \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

( $I_m = \omega q_m$ ). Запишем полученное выражение в виде

$$I = I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.107)$$

где  $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$  есть сдвиг по фазе между током и напряжением.

В соответствии с (1.106)

$$\operatorname{tg} \varphi = \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (1.108)$$

Из этой формулы следует, что ток отстаёт по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ), если  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , и опережает напряжение ( $\varphi < 0$ ) при условии, что  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ .

Из (1.105) следует, что

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1.109)$$

Представим (1.102) в виде

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cdot \cos \omega t. \quad (1.110)$$

Произведение  $IR$  равно напряжению  $U_R$  на активном сопротивлении;  $\frac{q}{C}$  – напряжение на конденсаторе  $U_C$ ;  $L \frac{dI}{dt}$  определяет напряжение на индуктивности  $U_L$ . С учётом этого можно написать:

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cdot \cos \omega t. \quad (1.111)$$

Таким образом, сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени напряжению, приложенному извне.

В соответствии с (1.107)

$$U_R = RI_m \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.112)$$

Разделив (1.104) на ёмкость, получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cdot \cos(\omega t - \psi) = U_{C_m} \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.113)$$

Здесь

$$U_{C_m} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (1.114)$$

Умножив производную функции (1.107) на  $L$ , получим напряжение на индуктивности:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_{L_m} \cdot \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.115)$$

Здесь

$$U_{L_m} = I_m \omega L. \quad (1.116)$$

Сопоставление формул (1.107), (1.112), (1.113) и (1.115) показывает, что напряжение на ёмкости отстаёт по фазе от силы тока на  $\pi/2$ , а напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$ . Напряжение на активном сопротивлении изменяется в фазе с током.

На рис. 1.25 приведены векторные диаграммы вынужденных колебаний в электрическом контуре для трёх случаев. За основную принята ось тока. Поэтому  $U_R$  изображено вектором, направленным вправо по горизонтали. Сумма векторов  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  равна вектору  $U$ , изображающему напряжение, приложенное к контуру.

На рис. 1.25, *б* показана диаграмма для случая, когда  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , т.е.  $\omega < \omega_0$ . В случае *б* угол  $\varphi$  отрицателен (он отложен по часовой стрелке); на рисунке указано абсолютное значение угла, равное  $-\varphi$ .

Из диаграмм на рис. 1.25, *а* и *б* видно, что, когда  $\omega > \omega_0$ , ток отстаёт по фазе от приложенного напряжения, а при  $\omega < \omega_0$  ток опережает напряжение. Если  $\omega = \omega_0$ , а значит  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , фазы тока и приложенного напряжения совпадают (рис. 1.25, *в*).

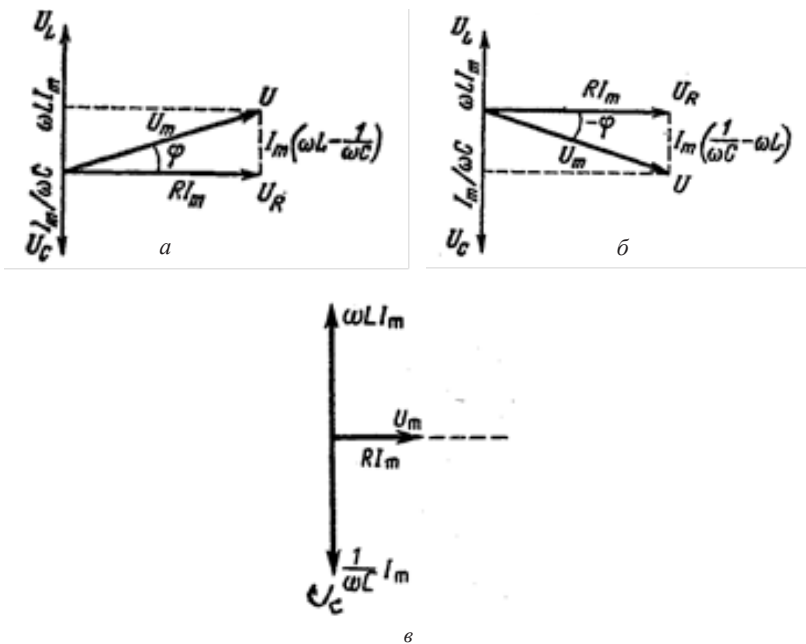


Рис. 1.25

В этом случае знаменатель в (1.109) становится минимальным, ток  $I_m$  — максимальным и при данном  $U_m$  определяется только активным сопротивлением  $R$ . Падение напряжения на  $R$  равно внешнему напряжению, приложенному к цепи, а напряжения на конденсаторе и катушке одинаковые по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется *резонансом напряжений*.

Резонансная частота для заряда  $q$  и напряжения на конденсаторе  $U_C$  равна:

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_{U_{\text{рез}}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0. \quad (1.117)$$

Резонансные кривые для  $U_C$  изображены на рис. 1.26. Они подобны резонансным кривым для механических колебаний (см. рис. 1.22).



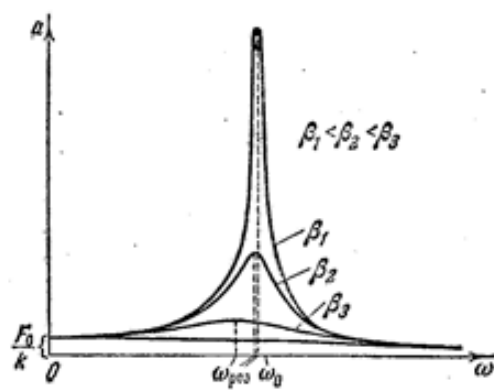


Рис. 1.26

При  $\omega \rightarrow 0$  кривые сходятся в одной точке с ординатой  $U_{C_m}$  равной напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения  $U_m$ . Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше  $\beta = \frac{R}{2L}$ , т.е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

Из формулы (1.109) следует, что амплитуда силы тока  $I_m$  достигает максимума при  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ . Отсюда для резонансной частоты тока получается значение

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Таким образом, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура.

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 1.27. По виду они совпадают с резонансными кривыми для скорости механических вынужденных колебаний. При стремлении частоты к нулю амплитуда силы тока также стремится к нулю – постоянный ток в цепи с конденсатором течь не может.

При малом затухании ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансную частоту для напряжения можно положить равной  $\omega_0$ . Соответственно  $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$  будет равно нулю. Согласно (1.114), для отношения амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе  $U_{C_{\text{мрез}}}$  к амплитуде внешнего напряжения  $U_{\text{м}}$  в этом случае получается значение

$$\frac{U_{C_{\text{мрез}}}}{U_{\text{м}}} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (1.118)$$

Таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное напряжение.

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть напряжение, приложенное к контуру, равно:

$$U = U_{\text{м}_1} \cdot \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{\text{м}_2} \cdot \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

Настроив контур на одну из частот  $\omega_1, \omega_2$  и т.д., можно получить на конденсаторе напряжение, в  $Q$  раз превышающее значение данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприёмника на нужную длину волны.

## 1.10. Переменный ток

Установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, обладающей ёмкостью, индуктивностью и активным сопротивлением, переменного тока, обусловленного переменным напряжением

$$U = U_{\text{м}} \cdot \cos \omega t. \quad (1.119)$$

Согласно (1.107), этот ток изменяется по закону

$$I = I_{\text{м}} \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.120)$$

Амплитуда тока определяется амплитудой напряжения  $U_m$ , параметрами цепи  $L, C, R$  и частотой  $\omega$ :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1.121)$$

Ток отстаёт по фазе от напряжения на угол  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (1.122)$$

Стоящее в формуле (1.121) выражение

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1.123)$$

называется *полным электрическим сопротивлением*, или *импедансом*.

Если цепь состоит из одного лишь активного сопротивления  $R$ , уравнение закона Ома имеет вид:

$$IR = U_m \cdot \cos \omega t.$$

Из этой формулы следует, что ток в этом случае изменяется в фазе с напряжением, а амплитуда силы тока равна

$$I = \frac{U_m}{R}.$$

Всякая реальная цепь обладает  $R, L$  и  $C$ . В отдельных случаях некоторые из этих параметров бывают таковы, что их влиянием на ток можно пренебречь. Допустим, что  $R$  цепи можно положить равным нулю, а  $C$  – равным бесконечности. Тогда из формул (1.121) и (1.122) следует, что

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad (1.124)$$

а  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$  (соответственно  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ). Величину

$$X_m = \omega L \quad (1.125)$$

называют реактивным индуктивным сопротивлением, или просто индуктивным сопротивлением цепи. Если  $L$  выразить в генри, а  $\omega$  – в  $\text{с}^{-1}$ ,  $X_L$  будет выражено в омах. Индуктивное сопротивление растёт с частотой (1.125).

Постоянному току ( $\omega = 0$ ) индуктивность не оказывает сопротивления.

Теперь допустим, что можно положить равными нулю  $R$  и  $L$ . Тогда, согласно (1.121) и (1.122),

$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}, \quad (1.126)$$

а  $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$  (т.е.  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ). Величину

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad (1.127)$$

называют реактивным ёмкостным сопротивлением, или ёмкостным сопротивлением. Если  $C$  выразить в фарадах, а  $\omega$  – в  $\text{с}^{-1}$ , то  $X_C$  будет выражено в омах.

Из (1.126) следует, что ёмкостное сопротивление убывает с частотой. Для постоянного тока  $X_C = \infty$  – постоянный ток через конденсатор течь не может. Ток, текущий через конденсатор, опережает напряжение на  $\pi/2$ .

Наконец, допустим, что можно положить  $R$  равным нулю. В этом случае, согласно (1.121),

$$I_m = \frac{U_m}{\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|}. \quad (1.128)$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C \quad (1.129)$$

называется *реактивным сопротивлением*, или *реактансом*.

Формулы (1.122) и (1.123) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Таким образом, если значения сопротивлений  $R$  и  $X$  отложить вдоль катетов треугольника, то длина гипотенузы будет численно равна  $Z$  (см. рис. 1.25, а).

Найдём мощность, выделяемую в цепи переменного тока. Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t) \cdot I(t) = U_m \cdot \cos \omega t \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} U_m \cdot I_m \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m \cdot I_m \cdot \cos(2\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (1.130)$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение мощности  $P$ . Так как среднее значение  $\cos(2\omega t - \varphi)$  равно нулю,

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cdot \cos \varphi. \quad (1.131)$$

Из (1.130) следует, что мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой, в 2 раза превышающей частоту тока (рис. 1.27).

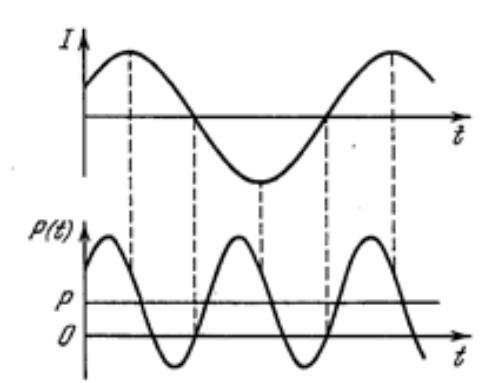


Рис. 1.27

В соответствии с диаграммой рис. 1.27

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{R}{Z}.$$

Подставив это значение  $\cos \varphi$  в формулу (1.131) и учтя, что  $\frac{U_m}{Z} = I_m$ , получим:

$$P = \frac{RI_m^2}{2}. \quad (1.132)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (1.133)$$

Величина (1.133) называется действующим (или эффективным) значением силы тока. Аналогично величина

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (1.134)$$

называется *действующим значением напряжения*.

Выражение средней мощности через действующие значения силы тока и напряжения имеет вид:

$$P = UI \cdot \cos \varphi. \quad (1.135)$$

Входящий в это выражение множитель  $\cos \varphi$  называют *коэффициентом мощности*. В технике стремятся сделать  $\cos \varphi$  как можно бóльшим.

## 2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

### 2.1. Распространение волн в упругой среде

Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебания её частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью  $v$ . Процесс распространения колебаний в пространстве называется *волной*.

Волны могут иметь различную форму. Одиночной волной, или импульсом, называется короткое возмущение, не имеющее регулярного характера (рис. 2.1, *а*). Ограниченный ряд повторяющихся возмущений называется *цугом* волн. Обычно под цугом понимают отрезок синусоиды (рис. 2.1, *б*). Особое значение в теории волн имеет гармоническая волна, т.е. бесконечная синусоидальная волна (рис. 2.1, *в*).

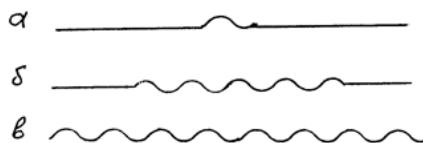


Рис. 2.1

Мы начнём с рассмотрения упругих гармонических волн.

Отметим, что частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают *продольные* и *поперечные* волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. Упругие поперечные волны могут возникать лишь в среде, обладающей сопро-

тивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твёрдой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

На рис. 2.2 показано движение частиц при распространении в среде поперечной волны. Номерами 1, 2 и т.д. обозначены частицы, отстоящие друг от друга на расстояние, равное  $\frac{1}{4}vT$ , т.е. на расстояние, проходимое волной за четверть периода колебаний, совершаемых частицами. В момент времени, принятый за нулевой, волна, распространяясь вдоль оси слева направо, достигла частицы 1, вследствие чего частица начала смещаться из положения равновесия вверх, увлекая за собой следующие частицы. Спустя четверть периода частица 1 достигает крайнего верхнего положения; одновременно начинает смещаться из положения равновесия частица 2. По прошествии ещё четверти периода первая частица будет проходить положение равновесия, двигаясь в направлении сверху вниз, вторая частица достигнет крайнего верхнего положения, а третья частица начнёт смещаться вверх из положения равновесия. В момент времени, равный  $T$ , первая частица закончит полный цикл колебания и будет находиться в таком же состоянии движения, как и в начальный момент. Волна к моменту времени  $T$ , пройдя путь  $vT$ , достигнет частицы 5.

Все рассуждения, касающиеся поведения частиц в поперечной волне, могут быть отнесены и к продольной волне. В ней в направлении распространения волны перемещаются сгущения и разрежения частиц.

На рис. 2.2 показаны колебания частиц, положения равновесия которых лежат на оси  $x$ . В действительности колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси  $x$ , а совокупность частиц в некотором объёме.



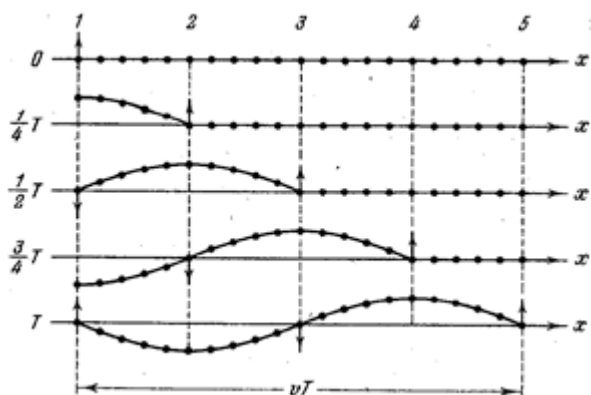


Рис. 2.2

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает всё новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется *фронтом волны*.

Фронт волны отделяет часть пространства, уже вовлечённую в волновой процесс, от области, в которой колебания ещё не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт в каждый момент времени только один.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В частности, они могут иметь форму плоскости и сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической. Именно такие волны мы и будем рассматривать ниже.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси  $x$ . Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату  $x$  (но различные значения координат  $y$  и  $z$ ), колеблются в одинаковой фазе. На рис. 2.3 изображена кривая, которая даёт смещение  $\xi$  из положения равновесия точек с различными  $x$  в некоторый момент времени.

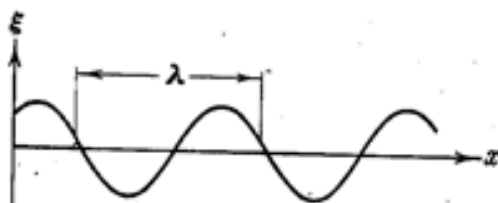


Рис. 2.3

Расстояние  $\lambda$ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны.

$$\lambda = vT, \quad (2.1)$$

где  $v$  – скорость волны;  $T$  – период колебаний. Заменяв  $T$  через  $\frac{1}{\nu}$  ( $\nu$  – частота колебаний), получим:

$$\lambda \nu = v. \quad (2.2)$$

## 2.2. Уравнение плоской и сферической волн

Уравнением волны называется выражение, которое даёт смещение колеблющейся частицы как функцию её координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ :

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \quad (2.3)$$

(имеются в виду координаты равновесного положения частицы). Эта функция должна быть периодической как относительно времени  $t$ , так и относительно координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Периодичность по координатам следует из того, что точки, отстоящие друг от друга на расстояние  $\lambda$ , колеблются одинаковым образом.

Найдём вид функции  $\xi$  в случае плоской волны, полагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, чтобы ось  $x$  совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые по-

верхности будут перпендикулярными к оси  $x$  и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение  $\xi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ :  $\xi(x, t)$ . Пусть колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$  (рис. 2.4), имеют вид

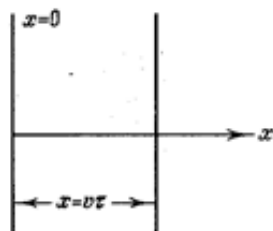


Рис. 2.4

$$\xi(0, t) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдём вид колебания точек в плоскости, соответствующей значению  $x$ . Для того, чтобы пройти путь от плоскости  $x = 0$  до этой плоскости, волне требуется время  $\tau = \frac{x}{v}$  ( $v$  – скорость распространения волны). Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости  $x$ , будут отставать по времени на  $\tau$  от колебаний частиц в плоскости  $x = 0$ , т.е. будут иметь вид

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos\left[\omega\left(t - \tau\right) + \alpha\right] = a \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v} + \alpha\right)\right]. \quad (2.4)$$

Итак, уравнение плоской волны (и продольной и поперечной), распространяющейся в направлении оси  $x$ , выглядит следующим образом:

$$\xi = a \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]. \quad (2.5)$$

Величина  $a$  представляет собой амплитуду волны. Начальная фаза волны  $\alpha$  определяется выбором начал отсчёта  $x$  и  $t$ .

Зафиксируем некоторое значение фазы в уравнении (2.5), положив

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = \text{const}. \quad (2.6)$$

Это выражение определяет связь между временем  $t$  и тем местом  $x$ , в котором фаза имеет зафиксированное зна-

чение. Вытекающее из него значение  $\frac{dx}{dt}$  даёт скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав (2.6), получим:

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0 ,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v . \quad (2.7)$$

Таким образом, скорость распространения волны  $v$  в уравнении (2.5) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем её называют *фазовой скоростью*.

Согласно (2.7),  $\frac{dx}{dt} > 0$ . Следовательно, уравнение (2.5) описывает волну, распространяющуюся в противоположном направлении, и описывается уравнением

$$\xi = a \cdot \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + \alpha \right] . \quad (2.8)$$

Действительно, приравняв константе фазу волны (2.8) и продифференцировав получившееся равенство, придём к соотношению

$$\frac{dx}{dt} = -v ,$$

из которого следует, что волна (2.8) распространяется в сторону убывания  $x$ .

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно  $x$  и  $t$  вид. Для этого введём величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} , \quad (2.9)$$

которая называется *волновым числом*. Умножив числитель и знаменатель выражения (2.9) на частоту  $\nu$ , можно представить волновое число в виде

$$k = \frac{\omega}{\nu}. \quad (2.10)$$

Раскрыв в (2.5) круглые скобки и приняв во внимание (2.10), придём к следующему уравнению плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$\xi = a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (2.11)$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания  $x$ , отличается от (2.11) только знаком при члене  $kx$ .

Если направление распространения плоской волны образует с осями координат  $x, y, z$  углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , отличные от нуля, то можно показать, что уравнение волны будет выглядеть следующим образом:

$$\xi(\vec{r}, t) = a \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (2.12)$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор, равный по модулю волновому числу  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  и направленный по нормали к волновой поверхности.

Функция (2.12) даёт смещение из положения равновесия точки с радиусом-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$  ( $\vec{r}$  определяет равновесное положение точки). Чтобы перейти от радиуса-вектора точки к её координатам  $x, y, z$ , выразим скалярное произведение  $\vec{k}\vec{r}$  через компоненты векторов по координатным осям:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z.$$

Тогда уравнение плоской волны примет вид:

$$\xi(x, y, z, t) = a \cdot \cos(\omega t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - k_z \cdot z + \alpha). \quad (2.13)$$

Здесь

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \gamma. \quad (2.14)$$

При выводе формулы (2.11) мы полагали, что амплитуда колебаний не зависит от  $x$ . Для плоской волны это наблюдается, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении волны в поглощающей среде интенсивность волны с удалением от источника колебаний уменьшается.

Теперь найдём уравнение сферической волны. Всякий реальный источник волн обладает некоторой протяжённостью. Однако, если ограничиться рассмотрением волны на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать *точечным*. В однородной и изотропной среде волна, порождаемая точечным источником, будет сферической.

Допустим, что фаза колебаний источника равна  $(\omega t + \alpha)$ . Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса  $r$ , будут колебаться с фазой

$$\omega \left( t - \frac{r}{v} \right) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(чтобы пройти путь  $r$ , волне требуется время  $\tau = \frac{r}{v}$ ).

В силу того, что волны сферические, амплитуда колебаний при отсутствии поглощения энергии убывает с расстоянием от источника по закону  $\frac{1}{r}$ . Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид:

$$\xi = \frac{a}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (2.15)$$

где  $a$  – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Отметим, что при стремлении  $r$  к нулю выражение для амплитуды обращается в бесконечность. Этот результат объясняется неприменимостью уравнения для малых  $r$ .

### 2.3. Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого *волновым*. Чтобы установить вид волнового уравнения, сопоставим вторые частные производные по координатам и времени от функции (2.13), описывающей плоскую волну. Продифференцировав эту функцию дважды по каждой из переменных, получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -\omega^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_x^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_y^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_z^2 \xi.$$

Сложение производных по координатам даёт:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(kx^2 + ky^2 + kz^2) \xi = -k^2 \xi. \quad (2.16)$$

Сопоставив эту сумму с производной по времени и заменив  $\frac{k^2}{\omega^2}$  на  $\frac{1}{v^2}$ , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$

Это и есть волновое уравнение. Его можно записать в виде:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.18)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида (2.16), описывает некоторую волну, причём корень квадратный из величины обратной коэффициенту при  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ , даёт фазовую скорость этой волны.

## 2.4. Скорость упругих волн в твёрдой среде

Рассмотрим цилиндрический стержень из однородного и изотропного материала. Допустим, что вдоль стержня распространяется плоская гармоническая волна. В этом случае частицы с координатой  $x$ , лежащие в поперечном сечении стержня, будут претерпевать смещение  $\xi$ , описываемое уравнением

$$\xi = a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (2.19)$$

График этой функции дан на рис. 2.5.

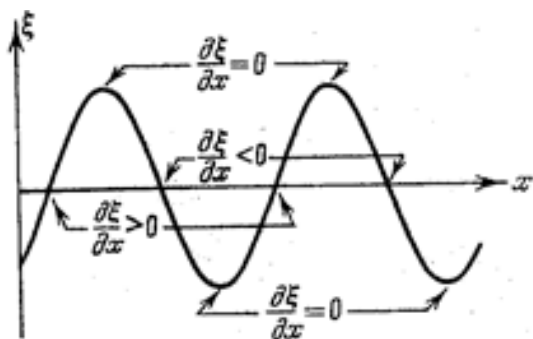


Рис. 2.5



Выделим в стержне элемент длины  $\Delta x$ , ограниченный в отсутствие волны сечениями  $x$  и  $x + \Delta x$  (рис. 2.6).

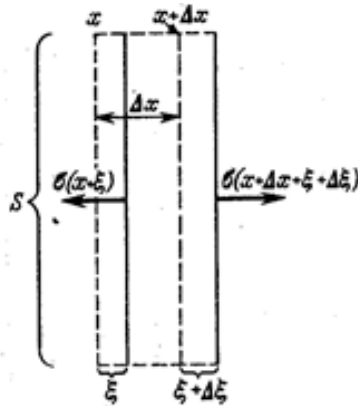


Рис. 2.6

Если сечение с координатой  $x$  имеет в некоторый момент времени смещение  $\xi$ , то смещение сечения с координатой  $x + \Delta x$  будет  $\xi + \Delta\xi$ .

Поскольку смещения сечений с разными значениями координаты  $x$  неодинаковы, рассматриваемый элемент стержня оказывается деформированным – он получает удлинение  $\Delta\xi$ . Отношение  $\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$  даёт среднее значение  $\langle \varepsilon \rangle$  относительного удлинения стержня  $\Delta x$ . Чтобы получить деформацию  $\varepsilon$  в сечении  $x$ , нужно устремить  $\Delta x$  к нулю. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.20)$$

(символ частной производной взят потому, что  $\xi$  зависит не только от  $x$ , но и от  $t$ ).

Наличие деформации растяжения свидетельствует о существовании в сечении  $x$  нормального напряжения  $\sigma$ :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.21)$$

( $E$  – модуль Юнга материала стержня). Относительная деформация  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ , а следовательно, и напряжение  $\sigma$  в фиксированный момент времени зависят от  $x$  (см. рис. 2.5). Там, где смещения сечений от положения равновесия максимальны, деформация и напряжение равны нулю. В местах, где сечения проходят через положения равновесия, деформация и напряжение достигают наибольшего значения, причём положительная и отрицательная деформации (т.е. растяжения и сжатия) чередуются друг с другом. В соответствии с этим продольная волна состоит из чередующихся растяжений и сжатий среды.

Написав для изображённого на рис. 2.6 элемента стержня второй закон Ньютона, после преобразований придём к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

( $\rho$  – плотность недеформированного стержня).

Сравнение уравнений (2.21) и (2.16) даёт для фазовой скорости продольной упругой волны в стержне выражение

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.23)$$

Аналогичные вычисления для поперечных волн приводят к формуле

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2.24)$$

где  $G$  – модуль сдвига.

## 2.5. Энергия упругой волны

Предположим, что в некоторой твёрдой среде распространяется в направлении оси  $x$  плоская продольная волна:

$$\xi = a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (2.25)$$

Выделим в среде элементарный объём  $\Delta V$ , настолько малый, чтобы скорость движения и деформацию во всех его точках можно было считать одинаковыми и равными соответственно  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ .

Выделенный объём обладает кинетической и потенциальной энергиями. Очевидно, что кинетическая энергия определяется соотношением

$$\Delta E_k = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V \quad (2.26)$$

( $\rho \cdot \Delta V$  – масса объёма;  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  – его скорость).

Нетрудно получить, что рассматриваемый объём обладает также потенциальной энергией упругой деформации

$$\Delta E_p = \frac{E \varepsilon^2}{2} \cdot \Delta V = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 \Delta V \quad (2.27)$$

( $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial \ell}$  – относительная деформация объёма;  $E$  – модуль Юнга среды). Заменим модуль Юнга, согласно (2.22), через  $\rho v^2$ . Тогда (2.26) примет вид:

$$\Delta E_p = \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \cdot \Delta V. \quad (2.28)$$

Сумма выражений (2.25) и (2.27) даёт полную энергию объёма  $\Delta V$ :

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V.$$

Разделив эту энергию на  $\Delta V$ , получим плотность энергии:

$$w = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.29)$$

Дифференцирование уравнения (2.24) один раз по  $t$ , другой раз по  $x$  даёт:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= -a\omega \cdot \sin(\omega t - kx + \alpha); \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= ak \cdot \sin(\omega t - kx + \alpha).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Подставив эти выражения в (2.28) и учтя, что  $k^2 v^2 = \omega^2$ , получим плотность энергии, возникающей в упругой среде при распространении в ней плоской продольной волны:

$$w = \rho a^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx + \alpha).\tag{2.31}$$

Можно показать, что для поперечной волны плотность энергии определяется такой же формулой. Выражение (2.30) справедливо для гармонических волн любого вида. Оно справедливо также и для затухающих волн.

Из (2.30) следует, что плотность энергии в каждый момент времени в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Среднее значение квадрата синуса равно  $\frac{1}{2}$ . Соответственно среднее по времени значение плотности энергии в данной точке среды равно:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2.\tag{2.32}$$

Итак, среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии через эту поверхность. Если через поверхность за время  $dt$  энергия  $dE$ , то поток энергии  $\Phi$  равен:

$$\Phi = \frac{dE}{dt}.\tag{2.33}$$

Поток измеряется в ваттах.

Поток энергии в разных точках пространства может обладать различной интенсивностью. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства используется векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещённую в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

Модуль плотности потока энергии определяется выражением

$$j = w \cdot v.$$

Введя вектор  $\vec{v}$ , модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны, получим:

$$\vec{j} = w \cdot \vec{v}. \quad (2.34)$$

Этот вектор для упругих волн был введён Н. А. Умовым и называется вектором Умова. Он, вообще говоря, различен в разных точках пространства, а в данной точке изменяется со временем по закону квадрата синуса. Его среднее значение равно

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \vec{v}. \quad (2.35)$$

Выражение (2.34) справедливо для волн любого вида.

Отметим, что под *интенсивностью* волны в данной точке подразумевается среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.

Если известен вектор  $\vec{j}$  во всех точках произвольной поверхности  $S$ , можно по формуле

$$\Phi = \int_S \vec{j} \cdot dS \quad (2.36)$$

вычислить поток энергии через эту поверхность. Заменяя в этой формуле вектор  $\vec{j}$  его средним по времени значением, получим среднее значение потока энергии:

$$\Phi = \int_S \langle \vec{j} \rangle d\vec{S}. \quad (2.37)$$

Найдём среднее значение потока энергии через одну из волновых поверхностей незатухающей сферической волны. В каждой точке этой поверхности векторы  $\vec{j}$  и  $d\vec{S}$  совпадают по направлению. Кроме того, модуль вектора  $\vec{j}$  для всех точек поверхности одинаков. Следовательно,

$$\langle \Phi \rangle = \oint_S \langle \vec{j} \rangle d\vec{S} = \langle j \rangle S = \langle j \rangle 4\pi r^2$$

( $r$  – радиус волновой поверхности). Согласно (2.34),  $\langle j \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v$ . Поэтому

$$\langle \Phi \rangle = 2\pi r \omega^2 v a_r^2 \cdot r^2$$

( $a_r$  – амплитуда волны на расстоянии  $r$  от источника). Поскольку энергия волны не поглощается средой, средний поток энергии через сферу любого радиуса должен иметь одинаковое значение, т.е. должно выполняться условие:

$$a_r^2 r^2 = \text{const}.$$

Отсюда следует, что амплитуда  $a_r$  незатухающей сферической волны обратна расстоянию  $r$  от источника. Соответственно средняя плотность потока энергии  $\langle j \rangle$ , т.е. интенсивность волны, обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

## 2.6. Звуковые волны

**Характеристики звука.** Если упругие волны в воздухе имеют частоту в пределах от 16 до 20000 Гц, то, достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. Поэтому упругие волны в любой среде, имеющие частоту, заключён-

ную в указанных пределах, называют звуковыми волнами, или просто звуком. Упругие волны с частотами, меньшими 16 Гц, называются *инфразвуком*, а с частотами, превышающими 20000 Гц, – *ультразвуком*. Инфра- и ультразвуки человеческого уха не слышит.

Люди различают звуки по высоте, тембру и громкости. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определённая физическая характеристика.

Всякий реальный звук является наложением гармонических колебаний с определённым набором частот. Если в звуке присутствуют колебания всех частот, заключённых в некотором интервале, то спектр называется *сплошным*. Если звук состоит из колебаний дискретных частот, то спектр называется *линейчатым*. Сплошным акустическим спектром обладают шумы. Колебания с линейчатым спектром называются *тональными*.

Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой. Относительная интенсивность обертонов определяет тембр звука.

Под интенсивностью звука понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, которую несёт с собой звуковая волна. Для того, чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется *порогом слышимости*.

Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1000 до 4000 Гц. В этой области частот порог слышимости составляет в среднем около  $10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . При других частотах порог слышимости лежит выше (рис. 2.7).

При интенсивностях порядка  $1 - 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$  волна перестаёт восприниматься как звук, вызывая в ухе лишь ощущение боли и давления. Значение интенсивности, при котором это происходит, называется *порогом болевого ощущения* (см. рис. 2.7).

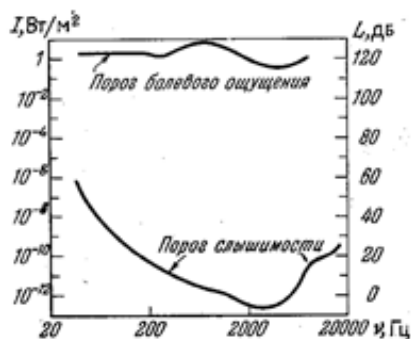


Рис. 2.7

Субъективно оцениваемая громкость звука возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает примерно в арифметической прогрессии, т.е. линейно. Поэтому уровень громкости  $L$  определяется как логарифм отношения интенсивности  $I$  данного звука к интенсивности  $I_0$ , принятой за исходную:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (2.38)$$

Исходная интенсивность  $I_0$  принимается равной  $10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

Единица уровня громкости, определяемого формулой (2.37), называется белом (Б). Обычно пользуются в 10 раз меньшей единицей – децибелом (дБ). Значение  $L$  в децибелах определяется выражением

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (2.39)$$

Отношение двух любых интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  также может быть выражено в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (2.40)$$



Например, затухание в 20 дБ означает, что интенсивность уменьшается в 100 раз.

Диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в человеческом ухе звуковое ощущение (от  $10^{-12}$  до  $10 \text{ Вт/м}^2$ ), соответствует значениям уровня громкости от 0 до 130 дБ.

Энергия звуковых волн крайне мала.

Ультразвуковые волны можно получать в виде направленных пучков. Они используются, в частности, для целей локации. С их помощью можно определять положения подводных лодок, измерять глубины, снимать рельеф морского дна и т. д.

Ультразвуковая локация позволяет летучей мыши хорошо ориентироваться в темноте.

**Эффект Доплера для звуковых волн.** Назовём приёмником устройство, способное воспринимать звуковые колебания среды. Если источник и приёмник неподвижны относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний, воспринимаемых приёмником, будет равна частоте  $\nu_0$  колебаний источника. Если же источник или приёмник либо оба они движутся, то частота  $\nu$ , воспринимаемая приёмником, может оказаться отличной от  $\nu_0$ . Это явление получило название *эффекта Доплера*.

Предположим, что источник и приёмник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника  $\nu_{\text{ист}}$  будем считать положительной, если он движется по направлению к приёмнику, и отрицательной, если он движется в направлении от приёмника. Аналогично скорость приёмника  $\nu_{\text{пр}}$  будем считать положительной, если он движется по направлению к источнику, и отрицательной, если он движется в направлении от источника.

Если источник неподвижен и колеблется с частотой  $\nu_0$ , то к моменту, когда он будет завершать  $\nu_0$ -е колебание, порождённый первым колебанием «гребень» волны успеет

пройти в среде путь  $v$  ( $v$  – скорость распространения волны относительно среды). Поэтому порождённые источником за секунду  $v_0$  «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине  $v$ . Если же источник движется относительно среды со скоростью  $v_{\text{ист}}$ , то в момент, когда источник будет завершать  $v_0$ -е колебание, «горб», порождённый первым колебанием, будет находиться от источника на расстоянии  $v - v_{\text{ист}}$  (рис. 2.8). Следовательно,  $v_0$  «горбов» и «впадин» волны уложатся на отрезке  $v - v_{\text{ист}}$ , так что длина волны будет равна

$$\lambda = \frac{v - v_{\text{ист}}}{v_0}. \quad (2.41)$$

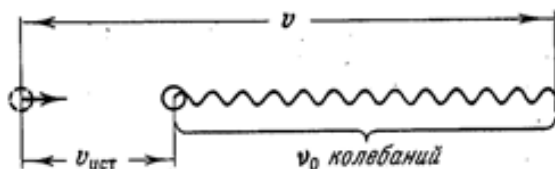


Рис. 2.8

Мимо неподвижного приёмника пройдут за секунду «горбы» и «впадины», укладываемые на длине  $v$ . Если приёмник движется со скоростью  $v_{\text{пр}}$ , то в конце промежутка времени в 1 с он будет воспринимать «впадину», которая в начале этого промежутка отстояла от его теперешнего положения на расстоянии  $v$ . Таким образом, приёмник воспримет за секунду колебания, отвечающие «горбам» и «впадинам», укладываемым на длине  $v + v_{\text{пр}}$  (рис. 2.9), и будет колебаться с частотой

$$\nu = \frac{v + v_{\text{пр}}}{\lambda}.$$

Подставив в эту формулу (2.40), получим:

$$\nu = v_0 \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{ист}}}. \quad (2.42)$$

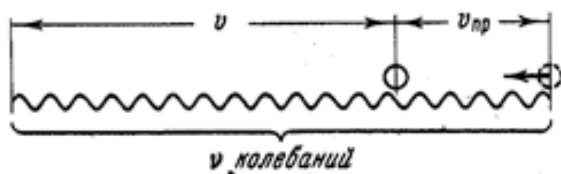


Рис. 2.9

Из (2.41) следует, что при движении источника и приёмника, когда расстояние между ними уменьшается, воспринимаемая приёмником частота  $\nu$  оказывается больше частоты источника  $\nu_0$ . Если же расстояние между источником и приёмником увеличивается,  $\nu$  будет меньше  $\nu_0$ .

В случае, когда направления скоростей  $v_{ист}$  и  $v_{пр}$  не совпадают с проходящей через источник и приёмник прямой, вместо  $v_{ист}$  и  $v_{пр}$  в формулу (2.41) нужно подставить проекции векторов  $\vec{v}_{ист}$  и  $\vec{v}_{пр}$  на направление этой прямой.

## 2.7. Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Значит, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется *принципом суперпозиции волн*.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются *когерентными*. При сложении когерентных волн возникает явление *интерференции*, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой и частотой. Возникающий в результате ко-

лебательный процесс называется *стоячей волной*. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отражённая волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = a \cdot \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Сложив вместе эти уравнения и преобразовав результат по формуле для суммы косинусов, получим уравнение стоячей волны:

$$\xi = 2a \cdot \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \quad (2.43)$$

Чтобы упростить его, выберем начало отсчёта  $x$  так, чтобы разность  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  стала равной нулю, а начало отсчёта времени  $t$  — так, чтобы оказалась равной нулю сумма  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ . Кроме того, заменим  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Тогда уравнение (2.42) примет вид:

$$\xi = 2a \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \omega t. \quad (2.44)$$

Из (2.43) видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причём амплитуда зависит от  $x$ :

$$\text{амплитуда} = \left| 2a \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right|.$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.45)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны. Из (2.44) получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2}. \quad (2.46)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются узлами стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют значения

$$x_{\text{узн}} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.47)$$

Узел, как и пучность, представляет собой не одну точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты  $x$ , определяемые формулой (2.46).

Из формул (2.45) и (2.46) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно  $\frac{\lambda}{2}$ . Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на  $\frac{\lambda}{4}$ . Точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе, так как множитель  $\left( 2a \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right)$  в уравнении (2.43) при переходе через нулевое значение меняет знак. Все точки, заключённые между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т.е. в одинаковой фазе). На рис. 2.10 дан ряд «моментальных фотографий» отклонений точек от положения равновесия. Первая «фотография» соответствует моменту, когда отклонения достигают наибольшего абсолютного значения. Последующие «фотографии» сделаны с интервалами в четверть периода. Стрелками показаны скорости частиц.

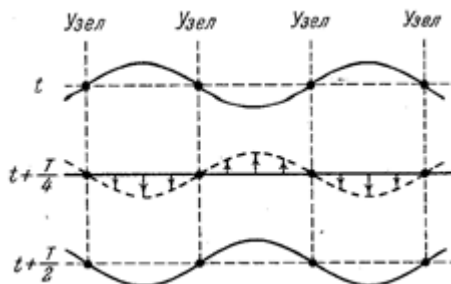


Рис. 2.10

Продифференцировав уравнение (2.43) один раз по  $t$ , а другой по  $x$ , найдём выражения для скорости частиц  $\dot{\xi}$  и для деформации среды  $\varepsilon$ :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sin \omega t, \quad (2.48)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2a \frac{2\pi}{\lambda} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \cos \omega t. \quad (2.49)$$

Эти уравнения описывают стоячую волну скорости (2.47) и стоячую волну деформации (2.48). На рис. 2.11 сопоставлены «моментальные фотографии» смещения, скорости и деформации для моментов времени 0 и  $\frac{T}{4}$ .

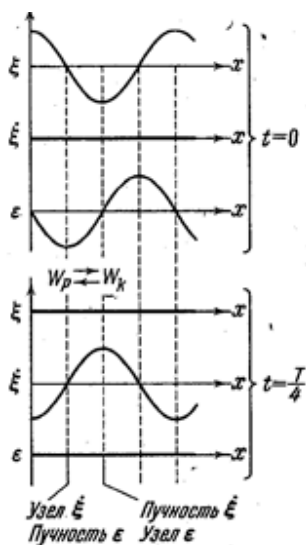


Рис. 2.11

Из рисунка видно, что в то время, как  $\xi$  и  $\varepsilon$  достигают максимальных значений,  $\dot{\xi}$  обращается в нуль и наоборот. Соответственно дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную, сосредоточенную в основном вблизи узлов волны (где находятся пучности деформации),

то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны (где находятся пучности скорости). В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

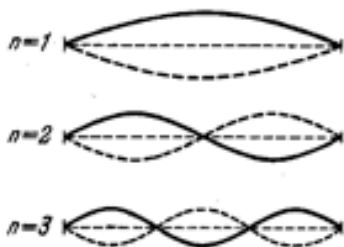


Рис. 2.12

**Колебания струны.** В закреплённой с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причём в местах закрепления струны должны располагаться узлы. Поэтому в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только такие колебания, половина длины которых укладывается на длине струны целое число раз (рис. 2.12).

Отсюда вытекает условие:

$$\ell = n \frac{\lambda}{2} \text{ или } \lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.50)$$

( $\ell$  – длина струны). Длинам волн соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2\ell} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.51)$$

( $v$  – фазовая скорость волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины струны).

Частоты  $\nu_n$  называются собственными частотами струны. Собственные частоты оказываются кратными частоте

$$\nu_1 = \frac{v}{2\ell},$$

которая называется основной частотой. Гармонические колебания с частотами (2.50) называются собственными,

или нормальными, колебаниями. В общем случае колебание струны представляет собой наложение различных гармоник.

Колебания струны примечательны в том отношении, что для них по классическим представлениям получаются дискретные значения одной из характеризующих колебания величин (частоты).

## 2.8. Волновой пакет. Групповая скорость

Волна, имеющая форму короткого импульса (рис. 2.13), может быть представлена (интеграл Фурье) как суперпозиция (наложение) гармонических волн, частоты которых заключены в некотором интервале  $\Delta\omega$ .

Такое образование называется *волновым пакетом*, или *группой волн*. В пределах пакета образующие его гармонические волны в большей или меньшей степени усиливают друг друга. Вне пакета эти волны практически гасят друг друга. Расчёт показывает: чем уже волновой пакет, тем больше должен быть интервал частот, представленных в пакете.

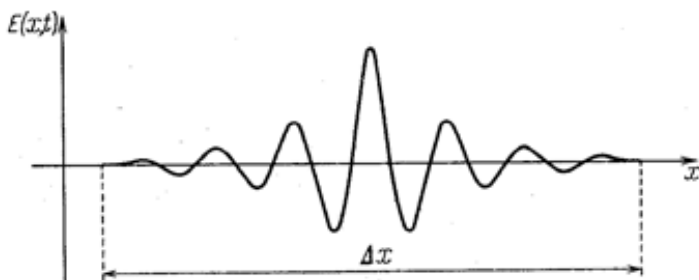


Рис. 2.13

В отсутствие дисперсии все волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью  $v = \frac{\omega}{k}$ . Очевидно, что с такой же скоростью перемещается и волно-



вой пакет, причём форма его не изменяется. В диспергирующей среде фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, поэтому пакет со временем расплывается – ширина его увеличивается. Если дисперсия невелика, расплывание пакета происходит не слишком быстро. В этом случае пакету можно приписать скорость  $U$ , под которой понимается скорость перемещения центра пакета, т.е. точки с максимальным значением амплитуды. Эту скорость называют *групповой*.

В диспергирующих средах групповая скорость оказывается отличной от фазовой. Покажем это на примере наложения двух волн с частотами  $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$  и  $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$  (соответствен-

но с волновыми числами  $k_0 - \frac{\Delta k}{2}$  и  $k_0 + \frac{\Delta k}{2}$ ). Амплитуды

волн будем считать одинаковыми. В этом случае уравнение волны имеет вид:

$$a \cdot \cos \left[ \left( \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left( k_0 - \frac{\Delta k}{2} \right) x \right] + a \cdot \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left( k_0 + \frac{\Delta k}{2} \right) x \right].$$

Воспользовавшись формулой для суммы косинусов, преобразуем это уравнение следующим образом:

$$2a \cdot \cos \left[ \left( \frac{\Delta\omega}{2} \right) \cdot t - \left( \frac{\Delta k}{2} \right) \cdot x \right] \cdot \cos(\omega_0 t - k_0 x).$$

Полученное уравнение можно рассматривать как уравнение бегущей гармонической волны с амплитудой, изменяющейся по закону

$$2a \cdot \cos \left[ \left( \frac{\Delta\omega}{2} \right) \cdot t - \left( \frac{\Delta k}{2} \right) \cdot x \right].$$

Максимальное значение амплитуды получается при условии, что величина, стоящая под знаком косинуса, равна

нулю. Отсюда следует, что координата  $x_m$  центра волнового пакета в момент времени  $t$  определяется из соотношения

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\frac{\Delta k}{2}\right)x_m = 0.$$

Разделив  $x_m$  на  $t$ , найдём скорость перемещения центра волнового пакета, т.е. групповую скорость:

$$U = \frac{x_m}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

В случае наложения волн с непрерывным набором частот групповая скорость определяется выражением

$$U = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.52)$$

Заменяв согласно (2.10)  $\omega$  через  $vk$ , выражение (2.51) можно представить в виде

$$U = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dV}{dk} = v + k \frac{dV}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}. \quad (2.53)$$

По определению  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , т.е.  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Следовательно,  $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$ . Подстановка этого значения  $\frac{d\lambda}{dk}$  в (2.52) приводит к формуле

$$U = v - \lambda \frac{dV}{d\lambda}. \quad (2.54)$$

В отсутствие дисперсии  $\frac{dV}{d\lambda} = 0$  и  $U = v$ .

Энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому скорость переноса энергии волной равна групповой скорости. При значительном затухании волны понятие групповой скорости утрачивает смысл.

### 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### 3.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля

При рассмотрении электромагнитных явлений мы выясним, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое, вообще говоря, тоже оказывается переменным. Это переменное магнитное поле порождает электрическое и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникает последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. В случае однородной нейтральной ( $\rho = 0$ ) непроводящей ( $j = 0$ ) среды с постоянными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$
$$\vec{\nabla} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{\nabla} \vec{H}, \quad \vec{\nabla} \vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E}.$$

Поэтому уравнения Максвелла можно написать следующим образом:

$$[\vec{\nabla} \vec{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \vec{H} = 0; \quad (3.2)$$

$$[\vec{\nabla} \vec{H}] = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0. \quad (3.4)$$

Возьмём ротор от обеих частей уравнения (3.1):

$$\left[ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \vec{E} \right] \right] = -\mu\mu_0 \left[ \vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right]. \quad (3.5)$$

Изменение последовательности дифференцирования по координатам и времени в правой части уравнения (3.5) приводит к равенству

$$\left[ \vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{\nabla} \vec{H} \right].$$

Подставим этот результат в (3.5) и заменив в получившемся уравнении значение для ротора  $\vec{H}$  из уравнения (3.3), получим:

$$\left[ \vec{\nabla}, \left[ \vec{\nabla} \vec{E} \right] \right] = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

$\left[ \vec{\nabla}, \left[ \vec{\nabla} \vec{E} \right] \right] = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \vec{E} \right) - \vec{\nabla} \vec{E}$ . В силу (3.4) первый член этого выражения равен нулю. С учётом этого приходим к уравнению

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Раскрыв оператор Лапласа и учтя, что  $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ , будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (3.3) и произведя аналогичные преобразования, придём к уравнению

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Сравнив уравнения (3.6) и (3.7) с волновым, видим, что они тождественны друг другу. Значит, всякая функция, удовлетворяющая таким уравнениям, описывает некоторую волну, причём корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, даёт фазовую скорость этой волны. Следовательно, уравнения (3.6) и (3.7) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (3.8)$$

В вакууме (т.е. при  $\varepsilon = \mu = 1$ ) скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в пустоте  $c$ .

### 3.2. Плоская электромагнитная волна

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной непроводящей среде с постоянными проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  ( $\rho = 0$ ,  $j = 0$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ). Направим ось  $x$  перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а значит, и их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат  $y$  и  $z$ .

Можно показать, что дифференциальные уравнения, описывающие такую волну, будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

Эти уравнения представляют собой частный случай уравнений (3.6) и (3.7).

Напомним, что  $E_x = E_z = 0$  и  $H_x = H_y = 0$ , так что  $E_y = E$  и  $H_z = H$ . Мы сохранили в уравнениях (3.9) и (3.10) индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$ , чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно-перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Простейшим решением уравнения (3.9) является функция

$$E_y = E_m \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.10) имеет аналогичный вид:

$$H_z = H_m \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (3.12)$$

В этих формулах  $\omega$  – частота волны;  $k$  – волновое число, равное  $\frac{\omega}{v}$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – начальные фазы колебаний в точках

с координатой  $x = 0$ .

Указанные решения удовлетворяют уравнениям (3.9) и (3.10), если  $\alpha_2 = \alpha_1$ , и

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_m^2 = \mu \mu_0 H_m^2. \quad (3.13)$$

Умножив уравнение (3.11) на орт оси  $y$ , а уравнение (3.12) на орт оси  $z$ , получим уравнения плоской электромагнитной волны в векторном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cdot \cos(\omega t - kx), \quad \vec{H} = \vec{H}_m \cdot \cos(\omega t - kx) \quad (3.14)$$

(мы положили  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$ ).

На рис. 3.1 показана «моментальная фотография» плоской электромагнитной волны. Из рисунка видно, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются

от нуля, а затем через  $\frac{1}{4}$  периода достигают наибольшего значения, причём, если  $\vec{E}$  направлен вверх, то  $\vec{H}$  направлен вправо (смотрим вдоль направления распространения

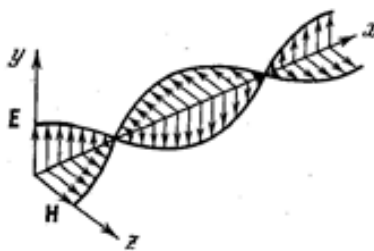


Рис. 3.1

волны). Ещё через  $\frac{1}{4}$  периода оба вектора одновременно обращаются в нуль, затем опять достигают наибольшего значения, но на этот раз  $\vec{E}$  направлен вниз, а  $\vec{H}$  влево. И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие изменения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанным вдоль оси  $x$ .

### 3.3. Экспериментальное исследование электромагнитных волн

Первые опыты с несветовыми электромагнитными волнами были осуществлены Г. Герцем. Для получения волны Герц применил изобретённый им вибратор, состоящий из двух стержней, разделённых искровым промежутком. При подаче на вибратор высокого напряжения от индукционной катушки в промежутке проскакивала искра. Она закорачивала промежуток, и в вибраторе возникали затухающие электрические колебания (рис. 3.2; показанные на рисунке дроссели предназначались для того, чтобы высокочастотный ток не ответвлялся в обмотку индуктора). За время горения искры

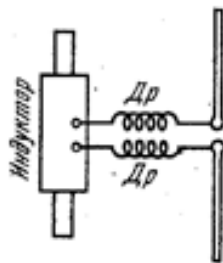


Рис. 3.2

успевало совершиться большое число колебаний, порождавших цуг электромагнитных волн, длина которых примерно вдвое превышала длину вибратора. Помещая вибраторы разной длины в фокусе вогнутого параболического зеркала, Герц получал направленные плоские волны, длина которых составляла от 0,6 до 10 м.

Исследование излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посередине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряжённости электрического поля волны в нём возбуждались колебания тока и напряжения. Поскольку длина вибратора выбиралась равной  $\frac{\lambda}{2}$ , колебания в нём вследствие резонанса достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр.

С помощью металлических зеркал и асфальтовой призмы Герц осуществил отражение и преломление электромагнитных волн и обнаружил, что оба эти явления подчиняются законам, установленным в оптике для световых волн. Отразив бегущую плоскую волну с помощью металлического зеркала в обратном направлении, Герц получил стоячую волну. Расстояние между узлами и пучностями волны позволило определить длину волны  $\lambda$ . Умножив  $\lambda$  на частоту колебаний вибратора  $\nu$ , можно было найти скорость электромагнитных волн, которая оказалась близкой к  $c$  света. Располагая на пути волн решётку из медной проволоки, Герц обнаружил, что при вращении решётки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решётку, сильно изменяется. Когда проволоки, образующие решётку, были перпендикулярны к вектору  $\vec{E}$ , волна проходила сквозь решётку без помех. При расположении проволок параллельно  $\vec{E}$  волна сквозь решётку не проходила. Таким образом, была доказана поперечность электромагнитных волн.



Опыты Герца были продолжены другими учёными. А.С. Попов впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (были переданы слова «Генрих Герц»). В настоящее время исследования свойств электромагнитных волн продолжаются.

### 3.4. Энергия электромагнитных волн и импульс электромагнитного поля

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии на скорость волны.

Пусть электромагнитная волна распространяется в вакууме. В этом случае скорость волны равна  $c$ . Плотность энергии электромагнитного поля  $\omega$  складывается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (3.15)$$

(для вакуума  $\varepsilon = \mu = 1$ ).

В данной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в одинаковой фазе (это справедливо только для вакуума и непроводящей среды). Поэтому соотношение (3.13) между амплитудными значениями  $E$  и  $H$  справедливо и для их мгновенных значений

$$E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}. \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны в каждый момент времени одинаковы:  $\omega_E = \omega_H$ .

$$\omega = \frac{1}{2} (E\sqrt{\varepsilon_0}) \left( E\sqrt{\varepsilon_0} + \frac{1}{2} (H\sqrt{\mu_0}) (H\sqrt{\mu_0}) = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = \frac{1}{c} EH \right).$$

Умножив найденное уравнение на скорость волны  $c$ , получим модуль плотности потока энергии:

$$S = \omega c = EH.$$

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно-перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $[\vec{E} \times \vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $E \cdot H$ . Значит, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (3.17)$$

Вектор  $\vec{S}$  называется вектором Пойтинга.

Можно показать, что формула (3.17) оказывается справедливой и в случае, когда электромагнитная волна распространяется в диэлектрической или проводящей среде.

Поток  $\Phi$  электромагнитной энергии через некоторую поверхность  $F$  можно найти с помощью интегрирования:

$$\Phi = \int_F \vec{S} d\vec{F}. \quad (3.18)$$

С помощью формул (3.17) и (3.18) можно показать, что в замкнутой цепи постоянного тока энергия от участков, где действуют сторонние силы, передаётся другим участкам цепи не *вдоль проводников*, а *через окружающее проводники пространство* в виде потока электромагнитной энергии, характеризуемого вектором  $\vec{S}$ .

Поглощаясь в каком-либо теле, электромагнитная волна сообщает этому телу некоторый импульс, т.е. оказывает на него *давление*. Это можно показать на следующем примере. Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность слабо проводящего тела с  $\varepsilon$  и  $\infty$ , равными единице (рис. 3.3).

Электрическое поле волны возбуждает в теле ток плотности  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, величину которой в расчёте на единицу объёма тела можно найти по формуле

$$\vec{F}_{\text{ед.об}} = [\vec{j} \times \vec{B}] = \mu_0 [\vec{j} \times \vec{H}].$$

Направление этой силы, определяемое правилом левой руки, совпадает с направлением распространения волны.

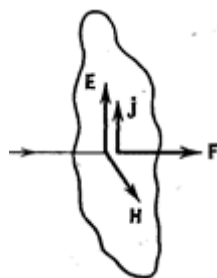


Рис. 3.3

Поверхностному слою с площадью, равной единице, и толщиной  $d\ell$  сообщается в единицу времени импульс

$$dK = F_{\text{ед.об}} d\ell = \mu_0 j H d\ell. \quad (3.19)$$

В этом же слое в единицу времени поглощается энергия

$$dW = j E d\ell \quad (3.20)$$

(необычность обозначения энергии и импульса обусловлена тем, что здесь наряду с этими понятиями используются напряжённость электрического поля  $\vec{E}$  и давление  $P$ ).

Найдём отношение импульса к энергии, разделив (3.19) на (3.20):

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$

Приняв во внимание, что  $\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$ , получим:

$$\frac{K}{W} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}.$$

Отсюда вытекает, что электромагнитная волна, несущая энергию  $W$ , обладает импульсом

$$K = \frac{1}{c} W. \quad (3.21)$$

Из (3.21) следует, что плотность импульса (т.е. импульс единицы объёма) электромагнитного поля равна

$$K_{\text{сл.об}} = \frac{1}{c} W. \quad (3.22)$$

Плотность энергии связана с модулем вектора Пойтинга соотношением  $S = \omega c$ . Заменяя в (3.21)  $\omega$  через  $\frac{S}{c}$  и учитывая, что направления векторов  $\vec{K}$  и  $\vec{S}$  совпадают, можно написать:

$$K_{\text{сл.об}} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c^2} [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (3.23)$$

Отметим, что при переносе любого вида энергии плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на  $c^2$ .

Пусть на некоторое тело падает нормально электромагнитная волна и полностью им поглощается. Тогда единице поверхности тела в единицу времени сообщается импульс волны, заключённый в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой  $c$ . Согласно (3.22), этот импульс равен  $\frac{\omega}{c} \cdot c = \omega$ . Вместе с тем импульс, сообщаемый единицей поверхности в единицу времени, равен давлению  $p$  на поверхность. Следовательно, в случае поглощающей поверхности  $p = \omega$ . Эта величина пульсирует с большой частотой. Поэтому практически может быть измерено её среднее по времени значение. Таким образом,

$$p = \langle \omega \rangle. \quad (3.24)$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в 2 раза больше.

### 3.5. Излучение диполя

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является колеблющийся электрический диполь. Диполь – это система, образованная неподвижным точечным зарядом  $+q$  и колеблющимся около него точечным зарядом  $-q$  (рис. 3.4). Дипольный электрический момент этой системы изменяется со временем по закону

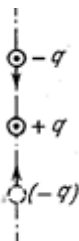


Рис. 3.4

$$\vec{p} = -q\vec{r} = -q\ell\vec{e} \cos \omega t, \quad (3.25)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор заряда  $-q$ ;  $\ell$  – амплитуда колебаний;  $\vec{e}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси диполя,  $\vec{p}_m = -q\ell\vec{e}$ .

Изучение подобной излучающей системы особенно важно в связи с тем, что многие вопросы взаимодействия излучения с веществом могут быть объяснены классически, исходя из представления об атомах как о системах зарядов, в которых содержатся электроны, способные совершать гармонические колебания около положения равновесия.

Рассмотрим излучение диполя, размеры которого малы по сравнению с длиной волны ( $\ell \ll \lambda$ ). Такой диполь называется элементарным. В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля очень сложна. Она сильно упрощается в так называемой *волновой зоне* диполя, которая начинается на расстояниях  $r$ , значительно превышающих длину волны ( $r \gg \lambda$ ).

Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в каждой точке взаимно-перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т.е. радиусу-вектору, проведённому в данную точку из центра диполя. Если смотреть вдоль луча  $\vec{r}$ , то мгновенная картина волны будет такой же,

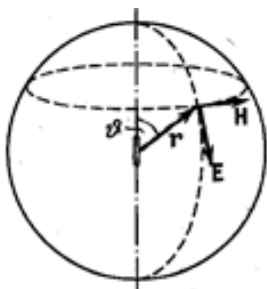


Рис. 3.5

как на рис. 3.5, с тем отличием, что амплитуда вдоль луча будет постепенно убывать.

В каждой точке  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются по закону  $\cos(\omega t - kr)$ . Амплитуды  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  зависят от расстояния  $r$  до излучателя и от угла  $\vartheta$  между направлением радиуса-вектора  $\vec{r}$  и осью диполя (рис. 3.5). Эта зависимость для вакуума имеет вид

$$\vec{E}_m \sim \vec{H}_m \sim \frac{1}{r} \cdot \sin \vartheta.$$

Среднее значение плотности потока энергии  $\langle \vec{S} \rangle$  пропорционально произведению  $E_m \cdot H_m$ , следовательно,

$$\langle \vec{S} \rangle \sim \frac{1}{r^2} \cdot \sin^2 \vartheta. \quad (3.26)$$

Из этой формулы следует, что интенсивность волны изменяется вдоль луча (при  $\vartheta = \text{const}$ ) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла  $\vartheta$ . Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси  $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ . В направлениях, совпадающих с осью ( $\vartheta = 0$  и  $\pi$ ), диполь не излучает. Зависимость интенсивности от угла  $\vartheta$  очень наглядно изображается с помощью диаграммы направленности диполя (рис. 3.6).

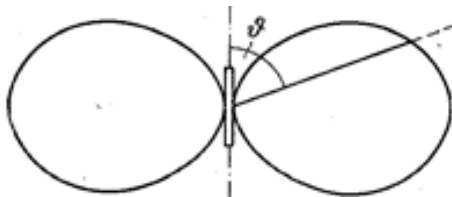


Рис. 3.6

Эта диаграмма строится так, чтобы длина отрезка, отсекаемого её на луче, проведённом из центра диполя, давала интенсивность излучения под углом  $\vartheta$ .

Расчёт даёт, что мощность излучения диполя  $P$  пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени:

$$P \sim \ddot{p}^2 \quad (3.27)$$

Согласно формуле (3.25),  $\ddot{p}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$ . Подстановка этого выражения в (3.27) даёт:

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (3.28)$$

Усреднив это выражение по времени, получим:

$$\langle P \rangle \sim p_m^2 \omega^4. \quad (3.29)$$

Таким образом, средняя мощность излучения диполя пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвёртой степени частоты. Поэтому при малой частоте излучение электрических систем бывает незначительным.

Согласно формуле (3.25),  $\ddot{p} = -q\ddot{r} = -q\ddot{a}$ , где  $\ddot{a}$  – ускорение колеблющегося заряда. Подстановка этого выражения в (3.27) даёт, что

$$P \sim q^2 \ddot{a}^2. \quad (3.30)$$

Эта формула определяет мощность излучения не только при колебаниях, но и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны, причём мощность излучения пропорциональна квадрату заряда и квадрату ускорения.

Заряд, совершающий гармонические колебания, излучает монохроматическую волну с частотой, равной частоте колебаний заряда. Если же ускорение заряда изменяется не по

гармоническому закону, излучение состоит из набора волн различных частот.

Согласно формуле (3.30), интенсивность обращается в нуль при  $\vec{a} = 0$ . Следовательно, электрон, движущийся равномерно, не излучает электромагнитных волн. Это, однако, справедливо лишь в том случае, если скорость электрона  $v_{эл}$  не превышает скорости света  $v_{св} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  в той среде, в которой движется электрон. В случае, когда  $v_{эл} > v_{св}$ , наблюдается излучение, открытое П. А. Черенковым.

### 3.6. Эффект Доплера для электромагнитных волн

Доплеровское смещение частоты световых волн определяется относительной скоростью источника и приёмника волн. Свяжем с приёмником света начало координат инерциальной системы отсчёта  $K$ , а с источником – начало координат системы  $K'$  (рис. 3.7). Оси  $x$  и  $x'$  направим вдоль вектора скорости  $v$ , с которой система  $K'$  (т.е. источник) движется относительно системы  $K$  (т.е. приёмника). Уравнение плоской световой волны, испускаемой источником по направлению к приёмнику, в системе  $K'$  имеет вид:

$$E'(x', t') = a' \cdot \cos \left[ \omega' \left( t' + \frac{x'}{c} \right) + \alpha' \right], \quad (3.31)$$

где  $\omega'$  – частота волны, наблюдаемая в системе отсчёта, связанной с источником, т.е. частота, с которой колеблется источник. Полагаем, что световая волна распространяется в вакууме, поэтому фазовая скорость равна  $c$ . От источника к приёмнику волна распространяется в направлении, противоположном оси  $x'$ , поэтому перед  $\frac{x'}{c}$  стоит знак плюс. В системе  $K$  эта же волна описывается уравнением

$$E(x, t) = a \cdot \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (3.32)$$



где  $\omega$  – частота, регистрируемая в системе  $K$ , т.е. частота, воспринимаемая приёмником.

Уравнение волны в системе  $K$  можно получить и из уравнения в системе  $K'$ , перейдя от  $x'$  и  $t'$  к  $x$  и  $t$  с помощью преобразований Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставив эти значения в (3.31), получим:

$$E'(x, t) = a' \cdot \cos \left[ \omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( t + \frac{x}{c} \right) + \alpha' \right]. \quad (3.33)$$

Уравнения (3.32) и (3.33) описывают в системе  $K$  одну и ту же волну. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\omega = \omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Изменим обозначения: частоту источника  $\omega'$  обозначим  $\omega_0$ , а скорость источника относительно приёмника обозначим буквой  $v$ . Тогда формула примет вид:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}. \quad (3.34)$$

Здесь скорость  $v$  – величина алгебраическая. При удалении источника  $v > 0$  и, согласно (3.34),  $\omega < \omega_0$ ; при приближении источника к приёмнику  $v < 0$ , тогда  $\omega > \omega_0$ .

Можно показать, что относительное изменение частоты

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c} \quad (3.35)$$

$$(\Delta\omega = \omega - \omega_0).$$

Кроме продольного эффекта, для электромагнитных волн существует поперечный эффект Доплера. Он заключается в уменьшении регистрируемой приёмником частоты, наблюдающемся в том случае, когда вектор относительной скорости направлен перпендикулярно к прямой, проходящей через приёмник и источник (например, когда источник движется по окружности, в центре которой находится приёмник). В этом случае частота  $\omega_0$  источника связана с частотой  $\omega$ , регистрируемой приёмником, соотношением

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (3.36)$$

Относительное изменение частоты при поперечном эффекте Доплера

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (3.37)$$

пропорционально квадрату отношения  $\frac{v}{c}$  и, следовательно, значительно меньше, чем при продольном эффекте.

В общем случае относительную скорость можно разложить на две составляющие, одна из которых направлена вдоль луча, а другая – перпендикулярно лучу. Первая составляющая обусловит продольный, вторая поперечный эффект Доплера.

Продольный эффект Доплера используется для определения радиальной скорости звёзд. В частности, таким способом было обнаружено разбегание галактик.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие колебания называются гармоническими? Приведите пример гармонических колебаний. Нарисуйте гармоническое колебание, описываемое уравнением  $x = 1 - \sin(\omega t + 30^\circ)$ .
2. Какая величина называется фазой колебания? Какими начальными условиями определяется начальная фаза колебаний?
3. Как связаны между собой частота и круговая частота? В каких единицах они измеряются?
4. Как найти максимальные скорость и ускорение частицы, если задано уравнение их гармонических колебаний?
5. По какому закону изменяются кинетическая  $E_k$  и потенциальная  $E_p$  энергии частицы, совершающей гармонические колебания? Нарисуйте графики  $E_k(t)$  и  $E_p(t)$ .
6. Как на пляже, имея только нитку и часы, найти ускорение свободного падения?
7. Какая величина называется приведённой длиной физического маятника? Каким свойством обладают центр качания и точка подвеса?
8. Из каких элементов состоит колебательный контур? По какому закону изменяется ток в контуре, если заряд конденсатора  $q$  изменяется по закону  $q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$ ?
9. Представьте вектором гармоническое колебание  $x = 1 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$ .
10. Чему равен период биений, если складываются два гармонических колебания  $x_1 = 3 \cdot \cos 2\pi 402t$  и  $x_2 = 5 \cdot \cos 2\pi 400t$ ?
11. Найдите траекторию движения точки, если она участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = 2 \cdot \sin \omega t$  и  $y = 2 \cdot \cos \omega t$ .

12. Как связаны между собой коэффициент затухания  $\beta$  и время релаксации? Нарисуйте график затухающего колебания и напишите уравнение, его описывающее.
13. Какая величина называется логарифмическим коэффициентом затухания? Каков её физический смысл?
14. Какое явление называется резонансом? Как найти резонансную частоту?
15. Нарисуйте график зависимости амплитуды от частоты. Какая величина называется добротностью и что она показывает?
16. Может ли напряжение на ёмкости в последовательном контуре ( $R, L, C$ ) быть больше, чем на входе? Нарисуйте векторную диаграмму для случая резонанса напряжений.
17. Напишите выражения для реактивного и полного сопротивлений. Какой ток и напряжение называется действующими? Почему  $\cos \varphi$  должен быть примерно равным единице?
18. Нарисуйте «мгновенную фотографию» плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ . Какими величинами определяется длина волны?
19. Напишите уравнение, описывающее плоскую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $x$ . Какая величина называется волновым числом? Какая скорость называется фазовой?
20. Какими величинами определяется фазовая скорость продольных и поперечных волн, распространяющихся в твёрдой среде?
21. Какая величина носит название вектора Умова? Что он показывает? По какому закону он изменяется в данной точке пространства?
22. В каком диапазоне частот мы слышим? Как определяется уровень громкости и в каких единицах он измеряется?
23. В чём состоит эффект Доплера?

24. Напишите уравнение стоячей волны. В каком случае при отражении волны от преграды возникает пучность, в каком случае узел?
25. Какие длины волн возбуждают с заметной интенсивностью на закреплённой с двух сторон струне длиной  $\ell$ ?
26. Какая скорость распространения волн называется групповой? Как она связана с фазовой скоростью?
27. Какие величины колеблются в электромагнитной волне? Нарисуйте «мгновенную фотографию» плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ . В какую сторону направлен вектор Пойнтинга?
28. Как определяется величина давления электромагнитных волн в случаях, когда тело поглощает падающее на него излучение и когда полностью отражает?
29. Нарисуйте диаграмму направленности элементарного диполя.
30. В чём состоят продольный и поперечный эффекты Доплера для электромагнитных волн?

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Тело совершает гармоническое колебательное движение. Во сколько раз время, затраченное на прохождение расстояния, равного первой половине амплитуды, меньше времени, затраченного на прохождение расстояния, равного второй половине амплитуды?

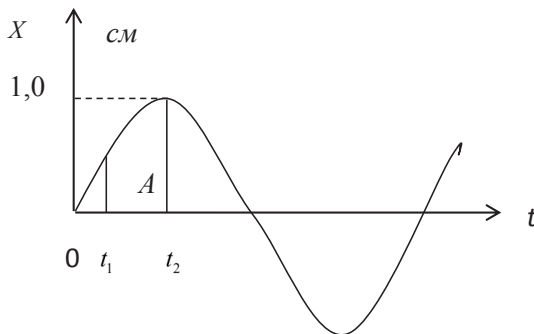


Рис. 1

### Решение

Предположим, что:

- а) в момент времени  $t = 0$   $x = 0$  ;
- б) в момент времени  $t_1$   $x = 0,5$  см ;
- в) в момент времени  $t_2$   $x = 1,0$  см .

Уравнение движения запишем в виде:

$$t_2 \quad x = 1,0 \text{ см} . \quad (1)$$

Подставляя в (1) начальные условия а), б), в), будем иметь:

$$0 = A \cdot \sin \alpha ; \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sin (\omega_0 t_1 + \alpha) ; \quad (3)$$

$$1 = \sin (\omega_0 t_2 + \alpha) . \quad (4)$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow \alpha = 0, \text{ из (3)} \Rightarrow \omega_0 t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6\omega_0}. \quad (5)$$

$$\text{Из (4)} \Rightarrow \omega_0 t_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что соотношение искомых времён равно

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = \frac{\frac{\pi}{2\omega_0} - \frac{\pi}{6\omega_0}}{\frac{\pi}{6\omega_0}} = 2.$$

**Задача 2.** К спиральной пружине подвесили груз, масса которого 0,1 кг значительно больше массы пружины. При этом пружина удлинилась на  $\Delta\ell = 5$  см. Затем груз оттянули на 3 см и отпустили. Определите потенциальную энергию колебаний и соотношение между периодами колебаний груза и потенциальной энергии.

### *Решение*

Из условия задачи следует, что в ней рассматриваются колебания пружинного маятника, которые описываются уравнением

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1)$$

Нам неизвестны  $\omega_0$  и  $\alpha$ . Найдём  $\omega_0$  из условия равновесия:

$$mg = k\Delta\ell_0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta\ell_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta\ell_0}}. \quad (2)$$

Начальную фазу  $\alpha$  найдём путём подстановки начальных условий в уравнение (1):

$$t = 0, x = A \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим:

$$x = 0,03 \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{\Delta \ell_0}} \cdot t. \quad (4)$$

Найдём потенциальную энергию

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{kx^2}{2} = \frac{mg}{2\Delta \ell_0} \cdot 0,03 \cdot \cos^2 \sqrt{\frac{g}{\Delta \ell_0}} \cdot t = \\ &= \frac{0,19 \cdot 8}{2,5 \cdot 10^{-2}} \cdot 9 \cdot 10^4 \cos^2 \sqrt{\frac{9,8}{5 \cdot 10^{-2}}} = 10^{-2} \cdot \cos^2 14\pi t \text{ Дж.} \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что период изменения потенциальной энергии в 2 раза меньше периода колебаний груза, так как период квадрата косинуса вдвое меньше периода косинуса.

**Задача 3.** Складываются два колебания  $x_1 = 5 \cdot \sin 500t$  см и  $x_2 = 5 \cdot \sin 501t$  см одного направления. Запишите уравнение результирующего колебания и определите период изменения его амплитуды.

### *Решение*

Из условия задачи видно, что складываются два гармонических колебания, направленных вдоль одной прямой с одинаковой амплитудой и близкими частотами. В результате возникают биения, описываемые уравнением

$$x = 2A \cdot \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \cdot \cos \omega t. \quad (1)$$

Подставляя в (1)  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$ ,  $\Delta \omega = 1 \text{ с}^{-1}$  и  $A = 0,05 \text{ м}$ , получим:

$$x = 0,1 \cdot \cos 500t \text{ м}. \quad (2)$$

Найдём период

$$T = \frac{2\pi}{\Delta \omega} = \frac{2\pi}{1} = 6,28 \text{ с}.$$



**Задача 4.** Материальная точка участвует в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями

$$x = 2 \cdot \cos \omega t \text{ см}; \quad (1)$$

$$y = 1 \cdot \sin \omega t \text{ см}. \quad (2)$$

Определите траекторию и постройте её на чертеже. Покажите направление движения точки.

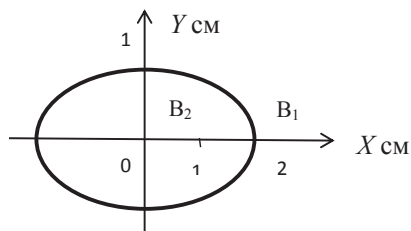


Рис. 1

### Решение

Оба колебания совершаются с одинаковыми циклическими частотами во взаимно-перпендикулярных направлениях. Начальная разность фаз колебаний  $\pi/2$ . Для нахождения уравнения траектории разделим уравнение (1) на 2, а уравнение (2) на единицу. Затем каждое уравнение возведём в квадрат и сложим. В результате получим:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1. \quad (3)$$

Уравнение (3) – уравнение эллипса с полуосями 2 см и 1 см (рис. 1).

Определим, в каком направлении будет двигаться точка по эллипсу. Для этого, пользуясь уравнениями (1) и (2), определим положение некоторой точки в следующие друг за другом моменты времени  $t_1 = 0$  и  $t_2 = \frac{T}{4}$ . Подставив в урав-

нения (1) и (2)  $t_1 = 0$ , получим  $x_1 = 2$  см,  $y_1 = 0$  см (точка  $B_1$  на рис. 1). Подставив в эти же уравнения  $t = \frac{T}{4}$ , будем иметь:

$$x_2 = 2 \cdot \cos \omega \frac{T}{4} = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ см};$$

$$y_2 = \sin \omega \frac{T}{4} = \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ см}.$$

Такими координатами обладает точка  $B_2$ . Следовательно, колеблющаяся точка движется по эллипсу против часовой стрелки.

**Задача 5.** Тело массой 1 г совершает затухающие колебания с частотой  $\omega = 3,14 \text{ с}^{-1}$ . В течение времени  $t = 50$  с энергия тела уменьшилась в 5 раз. Определите коэффициент затухания  $\beta$ , коэффициент сопротивления среды  $r$  и логарифмический коэффициент затухания  $\lambda$ .

#### *Решение*

Поскольку полная энергия при гармоническом колебательном движении пропорциональна квадрату амплитуды, то можно записать:

$$\frac{E_0}{E_n} = \frac{A_0^2}{A_n^2}, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{A_0}{A_n} = \sqrt{5} = 2,24. \quad (2)$$

С другой стороны, амплитуда затухающих колебаний меняется по закону

$$A_n = A_0 \cdot e^{-\beta t},$$

откуда

$$\frac{A_0}{A_n} = e^{\beta t}. \quad (3)$$

С учётом (2) получим:

$$\ln 2,24 = \beta t ,$$

$$\text{следовательно, } \beta = \frac{\ln 2,24}{t} = \frac{0,8}{50} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1} ,$$

$$\beta = \frac{r}{2m} \Rightarrow r = 2\beta m = 0,016 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с} .$$

$$\lambda = \beta T; T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \lambda = \beta \frac{2\pi}{\omega} ;$$

$$\lambda = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{3,14} = 3,2 \cdot 10^{-2} .$$

**Задача 6.** Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью  $C = 10^3$  пФ и катушки, индуктивность которой  $L = 4 \cdot 10^{-3}$  Гн, а сопротивление  $R = 2 \cdot 10^{-2}$  Ом.

Определите частоту собственных колебаний и длину волны, на которую настроен контур.

При разомкнутой цепи конденсатор зарядился до  $q_m = 2 \cdot 10^{-7}$  Кл, а затем цепь замкнули.

Запишите уравнение для разности потенциалов на зажимах конденсатора  $U_c(t)$  и тока в цепи  $I(t)$ .

Вычислите логарифмический декремент затухания контура, а также интервал времени, в конце которого амплитуда разности потенциалов  $U_{c_m}$  уменьшится в 2 раза. Определите число колебаний, совершённых за это время.

*Решение*

1. Частоту колебаний можно найти из соотношения

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} . \quad (1)$$

$$\text{В (1) } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \cdot 10^5 \text{ с}; \quad \beta = \frac{R}{2L} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \text{ с}^{-1} .$$

Так как  $\beta \ll \omega_0$ , то можно полагать, что

$$\nu = \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-9}}} = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Гц}; \quad (2)$$

$$\lambda = CT = \frac{C}{\nu} = \frac{2\pi C}{\omega} = 2\pi C\sqrt{LC} = 6,28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-9}} = 3760 \text{ м}.$$

2.  $R \uparrow 0$ , поэтому зависимость  $q(t)$  можно записать в виде

$$q = q_{m_0} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

где  $\alpha = 0$ , так как цепь замыкается в момент  $t = 0$ , когда  $q = q_{m_0}$ . Учитывая, что  $\alpha = 0$  и в нашем случае колебания носят квазигармонический характер, перепишем уравнение для заряда:

$$q = q_{m_0} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos \omega_0 t; \quad (4)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_{m_0}}{C} \cdot \cos \omega_0 t. \quad (5)$$

Подставляя в (5) численные значения, будем иметь:

$$U_C = 200 \cdot e^{-2,5t} \cdot \cos 5 \cdot 10^5 \text{ В}; \quad (6)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_{m_0} \cdot e^{-\beta t} \left[ \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\beta}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right]. \quad (7)$$

В (7) можно пренебречь вторым слагаемым, поскольку

$$\frac{\beta}{\omega_0} = 5 \cdot 10^{-6} \ll 1.$$

Тогда

$$I = I_{m_0} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (8)$$

Подставив в (8) численные значения, получим:

$$I = 0,1 \cdot e^{-2,5t} \cdot \cos\left(5 \cdot 10^5 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ А}. \quad (9)$$

3. По определению

$$\lambda = \beta t = \frac{\beta}{\nu} = \frac{2,5}{0,8 \cdot 10^5} = 3,1 \cdot 10^{-5}.$$

Для нахождения интервала времени воспользуемся соотношением  $A_n = A_0 \cdot e^{-\beta t}$ . Согласно этому соотношению

$$U_c(t) = U_{m_0} \cdot e^{-\beta t} \Rightarrow \frac{U_{m_0}}{U_c(t)} = e^{\beta t} \Rightarrow 2 = e^{\beta t} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\beta} = 0,28 \text{ с}.$$

За это время произойдёт  $N = \frac{t}{T} = t \cdot \nu = 0,28 \cdot 0,8 \cdot 10^5 = 22400$  колебаний.

**Задача 7.** К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на 9,8 см. Оттягивая этот груз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания  $\beta$ , чтобы: 1) колебания прекратились через 10 с (считать условно, что колебания прекратились, если их амплитуда упала до 1 % от начальной величины); 2) груз возвращался в положение равновесия аperiодически.

#### *Решение*

1. Для нахождения коэффициента затухания в первом случае воспользуемся соотношением

$$A_n = A_0 \cdot e^{-\beta t}. \quad (1)$$

Из него следует:

$$\frac{A_0}{A_n} = 100 = e^{+\beta t}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получим:

$$\beta = \frac{\ln 100}{t} = \frac{4,6}{10} = 0,46 \text{ с}^{-1}.$$

2. Аперiodический режим возникает, когда  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0$ , т.е.

$$\omega_0 = \beta. \quad (3)$$

Из условия равновесия можно найти  $\omega_0$ :

$$mg = k \cdot \Delta \ell_0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta \ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta \ell_0}}. \quad (4)$$

Учтя (3) и подставив численные значения в (4), будем иметь:

$$\beta = \sqrt{\frac{9,8}{0,098}} = \sqrt{100} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 8.** По грунтовой дороге прошёл трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии 30 см друг от друга. По этой дороге покатали детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на 2 см под действием груза в 1 кг. С какой скоростью катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Вес коляски 10 кг.

*Решение*

Коляска начнёт сильно раскачиваться, если промежуток времени между двумя последовательными толчками на углублениях будет равен периоду собственных колебаний коляски. Период собственных колебаний коляски находится по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1)$$

У нас  $m = \frac{10}{2} = 5 \text{ кг}$  — масса, приходящаяся на каждую рессору;  $k = \frac{F_0}{x_0} = \frac{1}{0,02} = 400 \text{ Н/м}$ . Подставив эти данные в (1), получим:

$$T = 6,28 \sqrt{\frac{5}{400}} = 0,63 \text{ с}. \quad (2)$$

Время между двумя последовательными толчками

$$t = \frac{\ell}{v}, \quad (3)$$

где  $v$  – скорость движения коляски;  $\ell$  – расстояние между углублениями.

При резонансе

$$\frac{\ell}{v} = T,$$

отсюда

$$v = \frac{\ell}{T} = \frac{0,3}{0,63} = 0,48 \text{ м/с}.$$

**Задача 9.** В однородной среде распространяется плоская упругая волна вида  $\xi = 0,02 \cdot \cos(100t - 2x)$  м. Найдите скорость распространения данной волны, максимальную скорость колебаний частиц среды и изобразите на графиках зависимости  $\xi$  и  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  от  $x$  для момента времени  $t = 0$ .

*Решение*

Волновое число  $k = \frac{\omega}{v}$ , отсюда

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (1)$$

В нашем случае  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ ;  $k = 2 \text{ м}^{-1}$ . Подставив в (1), будем иметь:

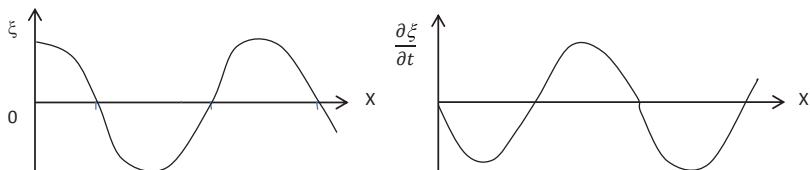
$$v = \frac{100}{2} = 50 \text{ м/с}.$$

Скорость колебания частиц среды  $U$  найдём, взяв производную по времени от исходного уравнения волны:

$$U = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2 \cdot \sin(100t - 2x) = 2 \cdot \cos\left(100t - 2x + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

Из сравнения (2) с исходным уравнением волны видно, что на графиках зависимости  $\xi$  и  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  должны изображаться косинусоиды, сдвинутыми по фазе друг относительно друга на  $\pi/2$  (рисунок).

Из (2)  $\Rightarrow U_m = 2 \text{ м/с}$ .



**Задача 10.** На струне длиной  $\ell = 100 \text{ см}$  образовалась стоячая волна, имеющая четыре узла. Найдите координаты точек, которые совершают колебания с амплитудой в 2 раза меньше максимальной  $A_m$ .

*Решение*

В рассматриваемом случае уравнение стоячей волны удобнее записать в виде

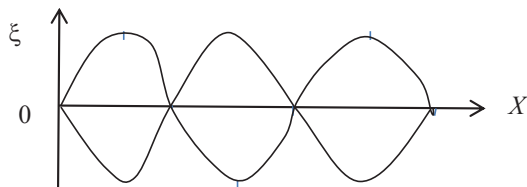
$$\xi = 2A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t. \quad (1)$$

Тогда зависимость амплитуды смещения  $A$  будет определяться выражением

$$A = A_m |\sin kx|. \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} = |\sin kx|. \quad (3)$$





Решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$x = \frac{\pm \frac{\pi}{6} + n\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \left( \pm \frac{1}{6} + n \right), \quad (4)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Чтобы определить  $\lambda$ , нарисует рассматриваемую стоячую волну. Из рисунка следует:  $\lambda = \frac{2}{3} \ell$ .

С учётом этого из (4) получим следующие значения искомых координат:

$$x = 5; 25; 35; 55; 65; 85 \text{ см}.$$

**Задача 11.** Точечный изотропный источник испускает звуковые колебания с частотой  $\nu = 9$  кГц. На расстоянии  $r_0 = 10$  мкм от источника амплитуда смещения частиц среды  $A_0 = 10$  мкм. Найдите расстояние  $r$ , на котором амплитуда смещения частиц среды  $A$  в 3 раза меньше  $A_0$  и амплитуду колебаний скорости частиц среды на этом расстоянии.

*Решение*

Процесс распространения звуковых колебаний от источника описывается сферической волной

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (1)$$

Обозначим  $a = \frac{A}{r}$ . Тогда

$$\frac{a}{a_0} = \frac{r_0}{r} = \frac{1}{3}$$

откуда  $r = 3r_0 = 30$  м.

Амплитуду колебаний скорости частиц найдём, взяв производную от смещения по времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -a\omega \cdot \sin(\omega t - kr + \alpha) \quad (2)$$

Из (2):

$$U_{\max} = a\omega = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot 2\pi \cdot 9 \cdot 10^3 = 0,19 \text{ м/с}.$$

**Задача 12.** Чему равно отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени  $\frac{T}{8}$  с ?

*Решение*

Имеем напряжение на ёмкости

$$U = U_0 \cdot \cos \omega t. \quad (1)$$

Найдём ток:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = -CU_0\omega \cdot \sin \omega t. \quad (2)$$

С учётом (1) и (2) найдём энергию магнитного  $E_{\text{м}}$  и электрического  $E_{\text{э}}$  полей:

$$E_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} LC^2 U_0^2 \omega^2 \cdot \sin^2 \omega t, \quad E_{\text{э}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2} CU_0^2 \cdot \cos^2 \omega t.$$

Отсюда

$$\frac{E_{\text{м}}}{E_{\text{э}}} = \frac{LC\omega^2 \cdot \sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = LC\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t. \quad (3)$$

При  $t = \frac{T}{8}$  величины  $\sin \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Кроме того,

$$LC = \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{1}{\omega^2}.$$

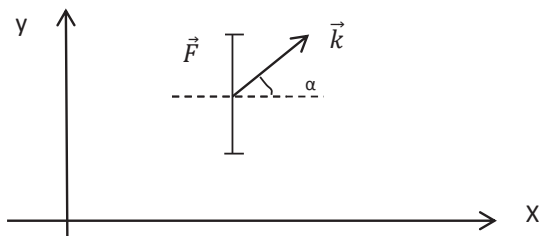
Подставив эти значения в (3), получим:

$$\frac{E_{\text{м}}}{E_{\text{э}}} = \frac{\sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = 1.$$

**Задача 13.** Плоская электромагнитная волна

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}),$$

где  $E_m = 500 \text{ В/м}$ , распространяется в вакууме. Найдите средний за период поток энергии, проходящий через плоскую поверхность площадью  $S = 5 \text{ см}^2$ , расположенную перпендикулярно оси  $x$ .

**Решение**

Средний за период поток энергии определяется соотношением

$$\Phi = \langle |\vec{S}| \rangle F \cdot \cos \alpha, \quad (1)$$

где  $\langle |\vec{S}| \rangle$  – усреднённый по времени модуль вектора Пойнтинга;  $\alpha$  – угол между волновым вектором  $\vec{k}$  и направлением оси  $x$  (рисунок);  $F$  – площадь.

Подставляя в (1)  $\langle P \rangle = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} \cdot C$  и учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ , будем иметь:

$$\Phi = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} \cdot C \cdot F \cdot \cos \alpha \approx 8 \text{ Дж/с}.$$

**Задача 14.** В упругой среде распространяется волна со скоростью  $300 \text{ м/с}$ . Уравнение колебаний источника имеет вид  $\xi = 10 \cdot \sin 0,5\pi t \text{ см}$ . Чему равна максимальная кинетическая энергия, переносимая волной через среду массой  $4 \text{ кг}$ ? Чему равна эта энергия в момент максимального смещения точек среды от положения равновесия?

### Решение

Кинетическую энергию, переносимую волной, вычислим по формуле

$$E = \frac{mU^2}{2}, \quad (1)$$

где  $U$  – скорость колебаний точек среды, в которой распространяется волна:

$$U = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

В рассматриваемом случае уравнение волны может быть записано в виде

$$\xi = 10 \cdot \sin 0,5\pi \left( t - \frac{x}{300} \right) \text{ см}. \quad (2)$$

Тогда

$$U = 10 \cdot 0,5\pi \cdot \cos 0,5\pi \left( t - \frac{x}{300} \right) \text{ см/с}. \quad (3)$$

Так как требуется найти максимальную кинетическую энергию, то вычислим  $U_{\max}$ :

$$U_{\max} = 10 \cdot 0,5\pi \cdot 10^{-2} = 0,05\pi \text{ м/с}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получим:

$$E_{\max} = \frac{m}{2} U_{\max}^2 = \frac{4}{2} \cdot 0,05^2 \cdot \pi^2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Ответим на второй вопрос:

$$E = \frac{mU^2}{2} = \frac{m}{2} 25\pi^2 \cdot \cos^2 0,5\pi \left( t - \frac{x}{300} \right). \quad (5)$$

Сравнивая (2) и (3), нетрудно видеть, что смещение колеблющихся точек принимает максимальное значение в тех случаях, когда  $\sin 0,5\pi \left( t - \frac{x}{300} \right) = 1$ , но в этот момент значение косинуса равно нулю. Значит кинетическая энергия у точек среды при их максимальном смещении равна нулю.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

*Савельев И. В.* Курс физики. – СПб.: Лань, 2006. – Т. 2. – 480 с.

*Фриш С. Э.* Курс общей физики / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – СПб.: Лань, 2006. – Т. 2. – 480 с.

*Киттель Ч.* Механика: пер. с англ. / Ч. Киттель, У. Найт, М. Руденман. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 480 с.

*Сивухин Д. В.* Общий курс физики. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – 551 с.

*Суорц К. Э.* Необыкновенная физика обыкновенных явлений: пер. с англ. – М.: Наука, 1987. – Т. 2. – 384 с.

*Яворский Б. М.* Основы физики / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 464 с.

*Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Высш. шк., 2003. – 542 с.

*Мэрион Дж. Б.* Физика и физический мир. – М.: Мир, 1975. – 623 с.

*Орир Дж.* Физика: пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – Т. 1. – 336 с.

*Орир Дж.* Физика: пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 288 с.

*Яворский Б. М.* Курс физики / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М.: Высш. шк., 1989. – 607 с.

*Селиванова Э. Б.* Колебания и волны. Волновая оптика: метод. указания к решению задач / Э. Б. Селиванова, В. Я. Чечуев. – Новосибирск, 2002. – 98 с.

*Грабовский Р. И.* Курс физики. – СПб.: Лань, 2002. – 608 с.

*Касьянов В. А.* Физика. 11 класс. – М.: Дрофа, 2004. – 416 с.

*Крауфорд Ф.* Волны: пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – Т. 3. – 528 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. КОЛЕБАНИЯ.....	4
1.1. Общие сведения о колебаниях .....	4
1.2. Гармонические колебания .....	5
1.3. Гармонический осциллятор .....	12
1.4. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот .....	21
1.5. Биения .....	24
1.6. Сложение взаимно-перпендикулярных колеба- ний.....	26
1.7. Затухающие колебания .....	29
1.8. Вынужденные колебания.....	36
1.9. Вынужденные электрические колебания .....	43
1.10. Переменный ток .....	50
2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ.....	55
2.1. Распространение волн в упругой среде.....	55
2.2. Уравнение плоской и сферической волн .....	58
2.3. Волновое уравнение.....	63
2.4. Скорость упругих волн в твёрдой среде .....	64
2.5. Энергия упругой волны .....	66
2.6. Звуковые волны .....	70
2.7. Стоячие волны .....	75
2.8. Волновой пакет. Групповая скорость .....	80
3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ .....	83
3.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля.....	83
3.2. Плоская электромагнитная волна .....	85
3.3. Экспериментальное исследование электромаг- нитных волн.....	87

3.4. Энергия электромагнитных волн и импульс электромагнитного поля .....	89
3.5. Излучение диполя .....	93
3.6. Эффект Доплера для электромагнитных волн.....	96
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....	99
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	102
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	118

Составитель  
Чечуев Владимир Яковлевич

## **ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

Учебное пособие

Редактор *Т. К. Коробкова*  
Компьютерная верстка *В. Н. Зенина*

Подписано в печать 11 марта 2014 г. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .

Объем 5,8 уч.-изд. л., 7,5 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Изд. № 125. Заказ № 1028.

---

Отпечатано в Издательском центре «Золотой колос»  
Новосибирского государственного аграрного университета  
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, каб. 106  
Тел/факс (383) 267–09–10, E-mail: 2134539@mail.ru